

МАТЕМАТИКА

Р. А. Оганян

Разложение по собственным функциям одной краевой задачи
второго порядка на полуоси

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 22/1 1962)

Пусть $l(y)$ — заданное на полуоси $[0, +\infty)$ дифференциальное выражение вида $l(y) = -(py')' + qy$, где $p(x)$ и $q(x)$ — вещественны, причем для любого $b > 0$

$$\int_0^b \frac{dx}{|p(x)|} < \infty, \quad \int_0^b |q(x)| dx < \infty.$$

Рассмотрим краевую задачу на полуоси $[0, +\infty)$:

$$l(y) = \lambda y \quad (A)$$

$$y(0) = \vartheta(\lambda) p(x) y'(x) |_{x=0}, \quad (B)$$

где $\vartheta(\lambda)$ — мероморфна, $l\vartheta(\lambda) \geq 0$ при $l\lambda > 0$, $\overline{\vartheta(\lambda)} = \vartheta(\bar{\lambda})$. Представим $\vartheta(\lambda)$ в виде $\vartheta(\lambda) = \frac{\vartheta_1(\lambda)}{\vartheta_2(\lambda)}$, где $\vartheta_1(\lambda)$, $\vartheta_2(\lambda)$ — целые функции, не имеющие общих корней. Обозначим через $v(x, \lambda)$ — решение задачи (A) — (B) нормированное условиями:

$$v(0, \lambda) = \vartheta_1(\lambda), \quad p(x) v'(x, \lambda) |_{x=0} = \vartheta_2(\lambda).$$

В случае, когда оператор, порожденный операцией $l(y)$, с минимальной областью определения, имеет индекс дефекта (1,1), А. В. Штраусом ⁽¹⁾ доказана следующая

Теорема А. Для любой функции $f(x) \in L^2_{(0, \infty)}$ имеют место формулы

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} V_f(\lambda) v(x, \lambda) d\rho(\lambda), \quad (1)$$

$$V_f(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x) v(x, \lambda) dx \quad (2)$$

и справедливо уравнение замкнутости

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |V_f(\lambda)|^2 d\rho(\lambda), \quad (3)$$

где $\rho(\lambda)$ — неубывающая функция, а интегралы в правых частях формул (1) и (2) сходятся соответственно в смысле метрик пространств $L^2_{(0, \infty)}$ и $L^2_{\rho(-\infty, +\infty)}$.

Пользуясь этой теоремой и методом В. А. Марченко ⁽²⁾, мы докажем формулы (1)–(3) без указанного ограничения на индекс дефекта.

§ 1. *Спектральный функционал задачи (A)–(B)*. 1. Обозначим через K — множество всех финитных функций из $L^2_{(0, \infty)}$, а через K_τ — множество всех функций из $L^2_{(0, \infty)}$, равных нулю при $x > \tau$. Введем линейное множество Z , состоящее из всех функций вида

$$\Phi(\lambda) = \sum_{i=1}^m a_i V_{f_i}(\lambda) V_{g_i}(\lambda), \quad (4)$$

где $f_i(x)$ и $g_i(x)$ — произвольные функции из K , a_i — произвольные комплексные числа. Следуя В. А. Марченко ⁽²⁾, линейный функционал R , определенный над Z , назовем спектральным функционалом краевой задачи (A)–(B), если

$$(R, V_f(\lambda) V_g(\lambda)) = \int_0^{\infty} f(x) g(x) dx, \quad (5)$$

для любых $f(x)$ и $g(x)$ из K .

2. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$l_\tau(y) \equiv -(p_\tau y')' + q_\tau y = \lambda y, \quad (A_\tau)$$

$$y(0) = \vartheta_1(\lambda), \quad p(x) y'(x)|_{x=0} = \vartheta_2(\lambda), \quad (B)$$

где $p_\tau(x)$ и $q_\tau(x)$ равны соответственно $p(x)$ и $q(x)$ при $0 \leq x \leq \tau$ и 1 и 0 при $x > \tau$.

Обозначим через $v_\tau(x, \lambda)$ — решение этой задачи при условиях:

$$v_\tau(0, \lambda) = \vartheta_1(\lambda), \quad p(x) v'_\tau(x, \lambda)|_{x=0} = \vartheta_2(\lambda),$$

а через $V_\tau^j(\lambda) = v_\tau$ — преобразование Фурье функции $f(x)$.

Очевидно для $0 \leq x \leq \tau$

$$v_\tau(x, \lambda) = v(x, \lambda),$$

поэтому для любого $f(x)$ из K_τ

$$V_\tau^j(\lambda) = V_f(\lambda). \quad (6)$$

Как известно ⁽³⁾, оператор, порожденный операцией $l_\tau(y)$, с минимальной областью определения, имеет индекс дефекта (1,1), поэтому, по теореме А. В. Штрауса, для любых $f(x)$ и $g(x)$ из K имеем:

$$\int_0^{\infty} f(x) g(x) dx = \int_0^{\infty} V_f(\lambda) V_g(\lambda) d\rho_s(\lambda),$$

отсюда ввиду (6) следует, что для любых $f(x)$ и $g(x)$ из K ,

$$\int_0^{\infty} f(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} V_f(\lambda) V_g(\lambda) d\rho_s(\lambda). \quad (7)$$

3. Лемма—Для любых $f_i(x)$ и $g_i(x)$ из K , для которых

$$\sum_{i=1}^m a_i V_{f_i}(\lambda) V_{g_i}(\lambda) \equiv 0 \quad (8)$$

справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^m a_i \int_0^{\infty} f_i(x) g_i(x) dx = 0. \quad (9)$$

Доказательство—Так как $m < \infty$, то существует такое ε , что $f_i(x), g_i(x) \in K$, ($i = 1, 2, \dots, m$). Тогда согласно (7) имеем

$$\int_0^{\infty} f_i(x) g_i(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} V_{f_i}(\lambda) V_{g_i}(\lambda) d\rho_s(\lambda) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Умножив эти равенства на a_i и просуммировав по i от 1 до m , мы получим формулу, откуда ввиду (8) следует (9).

Теорема 1. Спектральный функционал задачи (A)—(B) существует.

Доказательство. По определению Z каждый его элемент $\Phi(\lambda)$ можно представить в виде

$$\Phi(\lambda) = \sum_{i=1}^m a_i V_{f_i}(\lambda) V_{g_i}(\lambda). \quad (10)$$

Заметим, что это представление не единственное. Функционал R над Z определим по формуле:

$$(R, \Phi(\lambda)) = \sum_{i=1}^m a_i \int_0^{\infty} f_i(x) g_i(x) dx. \quad (11)$$

Из предыдущей леммы следует, что значение R на $\Phi(\lambda)$ не зависит от способа представления $\Phi(\lambda)$ в виде (10).

Очевидно, R —искомый функционал.

4. Функционал R , определенный над Z , назовем позитивным, если из

$$\Phi(x) \geq 0 \quad (\Phi(\cdot) \in Z, -\infty < x < +\infty)$$

следует, что

$$(R, \Phi(\lambda)) \geq 0.$$

Теорема 2. Спектральный функционал задачи $(A) - (B)$ — позитивен.

Доказательство. Из формулы (11) и (7) следует, что для любого $\Phi(\lambda)$ из Z существует такое ε , что

$$\begin{aligned} (R, \Phi(\lambda)) &= \sum_{i=1}^m a_i \int_0^{\infty} f_i(x) g_i(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^m a_i \int_{-\infty}^{\infty} V_{f_i}(\lambda) V_{g_i}(\lambda) d\rho_{\varepsilon}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda) d\rho_{\varepsilon}(\lambda), \end{aligned}$$

где $\rho_{\varepsilon}(\lambda)$ — неубывающая функция. Отсюда следует позитивность.

§ 2. Общий вид спектрального функционала R . Нахождение общего вида R основано на следующей теореме М. Г. Крейна (⁴), обобщающей известную теорему М. Рисса (⁵).

Рассмотрим произвольное линейное множество U непрерывных вещественных функций $f(x) (-\infty < x < +\infty)$, в котором имеется хотя бы одна строго-положительная функция.

Назовем функцию $f(x) \in U$ мажорируемой, если в множестве U найдется такая функция $g(x) \geq 0$, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0.$$

Теорема В. Пусть $\tilde{R}$ — аддитивный однородный и позитивный функционал, заданный на множестве U , тогда на всех мажорируемых функциях этого множества

$$(\tilde{R}, f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\rho(x), \quad (12)$$

где $\rho(x)$ — некоторая неубывающая функция.

1. Возьмем в качестве множества U все вещественные функции вида

$$f(x) = \Phi(x) \quad (-\infty < x < +\infty),$$

где $\Phi(\lambda)$ — произвольная функция из Z , вещественная на вещественной оси.

Очевидно, U — линейное множество непрерывных вещественных функций. Покажем, что в этом множестве есть строго-положительная функция. Пусть $\{\lambda_k\}_0^{\infty}$ — множество всех корней $V_f(\lambda)$, лежащих на вещественной оси, где $f(x)$ — фиксированная, вещественная, финитная функция. Отметим, что $V_f(\lambda)$ — целая функция, поэтому множество всех ее корней счетно.

Пусть

$$v_r(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq r \\ 0, & x > r \end{cases}.$$

$V_r(\lambda)$ обозначим через $V(\lambda, r)$, очевидно

$$V(\lambda, r) = \int_0^r v(x, \lambda) dx.$$

Пусть T_k — множество всех корней уравнения

$$V(\lambda_k, r) = 0.$$

Множество всех предельных точек T_k счетно. Действительно, если r_0 — предельная точка для T_k , то

$$V_r'(\lambda_k, r_0) = v(r_0, \lambda_k) = 0,$$

а множество всех корней уравнения

$$v(r, \lambda_k) = 0$$

счетное (в силу единственности решения задачи Коши для уравнения (A)). Отсюда следует, что и T_k счетно, поэтому и $\sum_{k=0}^{\infty} T_k$ счетно.

Пусть теперь $r \in \sum_{k=0}^{\infty} T_k$, тогда $V(\lambda_k, r) \neq 0$ ($k = 0, 1, \dots$), поэтому и функция $V_f^2(\lambda) + V_{v_r}^2(\lambda)$ не имеет корней на вещественной оси. Рассмотрим функцию $\Phi(\lambda) = V_f^2(\lambda) + V_{v_r}^2(\lambda)^2$. Очевидно, $\Phi(\lambda) \in Z$ и $\Phi(x) > 0$ ($-\infty < x < +\infty$).

2. Позитивный спектральный функционал R — индуцирует на множестве U аддитивный, однородный и позитивный функционал $\tilde{R}$

$$(\tilde{R}, \Phi(x)) = (R, \Phi(\lambda))$$

согласно (12)

$$(R, \Phi(\lambda)) = (\tilde{R}, \Phi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) d\rho(x) \quad (13)$$

на всех $\Phi(\lambda)$, которые имеют мажоранту в U .

Пусть K^0 — множество всех гладких функций из K , удовлетворяющих условиям: $f(0) = f'(0) = 0$, $l(t) \in K$.

Если $f(x) \in K^0$, то $\lambda V_f(\lambda) = V_{l(f)}(\lambda)$.

Отсюда легко заключить, что всякая функция $f(x)$ из U вида

$$f(x) = |V_{\psi}(\lambda) \pm V_{\phi}(\lambda)|^2,$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ —вещественные функции из K , имеет мажоранту вида

$$g(x) = [V_{l(\varphi)}(\lambda) \pm V_{l(\psi)}(\lambda)]^2.$$

Теорема 3. Для любых $f(x)$ и $g(x)$ из K^0 имеем

$$(R, V_f(\lambda) V_g(\lambda)) = \int_{-\infty}^{\infty} V_f(\lambda) V_g(\lambda) d\rho(\lambda),$$

где $\rho(\lambda)$ —неубывающая функция.

Доказательство. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ —вещественные функции из K . Очевидно

$$V_f(\lambda) V_g(\lambda) = \frac{1}{4} [V_f(\lambda) + V_g(\lambda)]^2 - \frac{1}{4} [V_f(\lambda) - V_g(\lambda)]^2,$$

где каждое слагаемое имеет мажоранту, поэтому из аддитивности функционала R и формулы (13) следует теорема.

3. Из теоремы 3 и формулы (5) следует равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty f(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^\infty V_f(\lambda) V_g(\lambda) d\rho(\lambda), \quad (14)$$

которое доказано пока только для любых $f(x)$ и $g(x)$ из K^0 . Но ввиду $\overline{K^0} = L^2_{(0, \infty)}$ его распространение на произвольные функции из $L^2_{(0, \infty)}$ производится стандартным методом.

Из равенства Парсеваля (14) обычным путем можно получить формулы обращения (1)–(2).

Итак, формулы (1)–(3) доказаны без указанного ограничения на индекс дефекта.

В заключение выражаю глубокую благодарность В. А. Марченко, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Ереванский государственный университет

Ռ. Ա. ՕՅԱՆԱՆ

**Վերլուծության ըստ մի երկրորդ կարգի եզրային խնդրի սեփական
ֆունկցիաների կիսաանոսցի վրա**

Աշխատության մեջ դիտարկվում է հետևյալ եզրային խնդիրը $[0, +\infty)$ կիսանոսցի վրա

$$-(py')' + qy = \lambda y \quad (A)$$

$$y(0) = \vartheta(\lambda) p(x) y'(x)|_{x=0}, \quad (B)$$

որտեղ $p(x)$ -ը, $q(x)$ -ը իրական են և համայական դրական b -ի համար

$$\int_0^b \frac{dx}{|p(x)|} < \infty, \quad \int_0^b |q(x)| dx < \infty$$

իսկ $\vartheta(\lambda)$ -ն բազարարում է հետևյալ սլաժաններին $\vartheta(\lambda) = \frac{\vartheta_1(\lambda)}{\vartheta_2(\lambda)}$, որտեղ $\vartheta_1(\lambda)$ -ն $\vartheta_2(\lambda)$ -ն համայական ամբողջ ֆունկցիաներ են.

$$I\vartheta(\lambda) \geq 0, \quad \text{երբ} \quad I\lambda > 0, \quad \overline{\vartheta(\lambda)} = \vartheta(\bar{\lambda}):$$

Դիցուք $v(x, \lambda)$ -ն, $(A) - (B)$ խնդրի այնպիսի լուծումն է, որ

$$v(0, \lambda) = \vartheta_1(\lambda), \quad p(x) v'(x, \lambda)|_{x=0} = \vartheta_2(\lambda):$$

Ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ. Կամայական $f(x)$ -ի համար, որը պատկանում է $L^2_{(0, \infty)}$ -ին իրավացի են հետևյալ բանաձևերը.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} V_f(\lambda) v(x, \lambda) d\rho(\lambda), \quad V_f(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x) v(x, \lambda) dx$$

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |V_f(\lambda)|^2 d\rho(\lambda),$$

որտեղ $\rho(\lambda)$ -ն չնվազող ֆունկցիա է, իսկ առաջին երկու բանաձևերում ինտեգրալները դուզամիտում են $L^2_{(0, \infty)}$ և $L^2_{\rho(0, \infty)}$ տարածությունների մետրիկաների իմաստով (համապատասխանաբար):

Բանաձևեր դեպքում, երբ (A) հավասարումը ունի միայն մեկ անկախ լուծում $L^2_{(0, \infty)}$ -ում (դոնե մեկ λ -ի համար), նշված թեորեմը ապացուցել է Ա. Վ. Շտրաուսը⁽¹⁾:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. В. Штраус, О разложении по собственным функциям одной краевой задачи второго порядка на полуоси. ИАН, сер. матем., 20 (1956), 783—792. ² В. А. Марченко, Разложение по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов II-го порядка, Матем. сб., 52 (94): 2 (1960), 739—788. ³ М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, ГТТИ, стр. 261. ⁴ Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн, О некоторых вопросах теории моментов. Хрк. 1938, стр. 134. ⁵ М. Русс, Sur le problème des moments, 3-me note, Ark. för Mat., Astr. och. Fys., 17, № 16 (1923).