ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXXIV 1962 2

МАТЕМАТИКА

Р. М. Мартиросян

Об индексах дефекта и спектре некоторых операторов

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 27/XII 1961)

Следуя Денфорду, точку λ_0 назовем точкой непрерывного спектра оператора A (несамосопряженного), если λ_0 не является собственным значением этого оператора и область значений $\Delta_{A-\lambda_0 E}$ оператора $A-\lambda_0 E$ всюду плотна и незамкнута.

Теорема 1. *Пусть R_λ — резольвента самосопряженного оператора A (неограниченного) в гильбертовом пространстве H и S — ограниченный линейный оператор (несамосопряженный). Точка λ_0 непрерывного спектра оператора A остается точкой непрерывного спектра возмущенного оператора $T=A+S^2$, если для какой-нибудь последовательности вещественных чисел τ_n, $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n=0$ имеет место оценка*

$$\overline{\lim_n}\,\|SR_{\lambda_0+i\tau_n}S\|=q<1.$$

Наметим доказательство этой теоремы. Заметим сперва, что если λ_0 является точкой непрерывного спектра оператора A и если уравнение $Au-\lambda_0 u=f$ при некотором $f\in H$ разрешимо, то можно показать, что

$$u=\lim_{\tau\to 0}R_{\lambda_0+i\tau}f \qquad (\operatorname{Im}\tau=0).$$

Для этого надо предварительно установить оценку

$$\|-i\tau R_{\lambda_0+i\tau}u\|\leqslant\|(E_{\lambda_0+\sqrt{|\tau|}}-E_{\lambda_0-\sqrt{|\tau|}})u\|+2\sqrt{|\tau|}\,\|u\|,$$

где E_λ — разложение единицы оператора A. Допустим теперь, что λ_0 является собственным значением оператора $T=A+S^2$ и пусть $Au+S^2u=\lambda_0 u$, $\|u\|>0$. Тогда легко видеть, что $\varphi=Su$ удовлетворяет уравнению $\varphi=\lim\limits_{\tau\to 0}SR_{\lambda_0+i\tau}S\varphi$, $\|\varphi\|>0$, что противоречит условию теоремы. Нетрудно также видеть, что многообразие элементов вида $Tu-\lambda_0 u$, $(u\in D_T=D_A)$ плотно в H, поскольку $\|SR_{\lambda_0+i\tau_n}S\|=\|S^*R_{\lambda_0-i\tau_n}S^*\|$. Наконец, λ_0 не может быть регулярной точкой оператора T. В самом деле, в противном случае существовала бы резольвента B_{λ_0} оператора $T = A + S^2$ в точке λ_0. Но тогда можно доказать, что оператор $(E - SB_{\lambda_0}S)^{-1}$ существует и определен на всем H. Для этого надо установить сперва, что оператор $(E - SB_{\lambda_n}S)^{-1}$, ($\lambda_n = \lambda_0 + i\tau_n$) существует и ограничен, а затем показать, что

$$\overline{\lim_n} \| (E - SB_{\lambda_n} S)^{-1} \| \leqslant 1 + q.$$

Из сказанного следует, что уравнение $\varphi = SB_{\lambda_0}S\varphi + SB_{\lambda_0}f$ разрешимо при всех $f \in H$. Положим $u = B_{\lambda_0}S\varphi + B_{\lambda_0}f$, где φ — решение этого уравнения. Легко показать, что u удовлетворяет уравнению $Au - \lambda_0 u = f$ при всех $f \in H$, а это противоречит условию теоремы.

Теорема 2. *Пусть B — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H и пусть на многообразии $D_A \subset H$, плотном в H, задан симметрический оператор A. Для того, чтобы индексы дефекта оператора $A + B$ были равны* (0, 0), *необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность ограниченных сомосопряженных операторов C_n ($n = 1, 2, \cdots$), перестановочных с оператором A ($C_nA \subset AC_n$), удовлетворяющих следующим условиям*

а) $$\lim_{n\to\infty} \| C_n u - u \| = 0, \quad u \in H$$

б) $$\| \dot{A} C_n u \| \leqslant M_n \| u \|, \quad u \in D_A.$$

Заметим, что теорему достаточно доказать в случае, когда $B = 0$. В самом деле, если, например, индексы дефекта оператора $A + B$ равны (0, 0), то оператор $\overline{A + B} = \bar{A} + B$ — самосопряженный и для невещественных λ существует оператор $(\bar{A} + B - \lambda E)^{-1}$. Для любого $f \in H$ обозначим через $g \in H$ решение уравнения $g - B(\bar{A} + B - \lambda E)^{-1} g = f$. Очевидно, последнее уравнение всегда разрешимо, если мнимую часть λ брать настолько большой, чтобы $\| B(\bar{A} + B - \lambda E)^{-1} \| < 1$. Пусть $(\overline{A + B} - \lambda E) u = g$, $u \in D_{\overline{A+B}} = D_{\bar{A}}$. Тогда $(\bar{A} - \lambda E) u = g - Bu = g - B(\overline{A + B} - \lambda E)^{-1} g = f$ и, следовательно, замыкание $\bar{A}$ оператора A самосопряженно. Обратно, легко видеть, что если индексы дефекта оператора A равны (0, 0), то индексы дефекта оператора $A + B$ также равны (0, 0). В случае же, когда $B = 0$, необходимость условий (а) и (б) теоремы следует из того, что в качестве C_n можно принять оператор $C_n = E_n - E_{-n}$, где E_λ — разложение единицы замыкания $\bar{A}$ оператора A. Для доказательства достаточности надо установить сперва, что и для сопряженного оператора A^* справедливо условие (б) теоремы. После этого можно доказать, что если $u \in D_{A^*}$ и $v = A^*u$, то существует такая последовательность $\psi_n \in D_A$, $\lim\limits_{n\to\infty} \| \psi_n - u \| = 0$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \| C_n \psi_n - u \| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \| \dot{A} C_n \psi_n - v \| = 0.$$

Поскольку $C_n\psi_n \in D_A$ в силу перестановочности операторов C_n с оператором A, то отсюда заключаем, что оператор A^* содержится в замыкании оператора A и, следовательно, совпадает с ним.

Заметим, что операторы C_n могут и не иметь отношения к разложению единицы оператора A, как это видно, например, из приводимого ниже следствия 3 доказанной теоремы.

Условимся обозначать через $L_2(\Omega, \sigma)$ гильбертово пространство функций $u(x)$, суммируемых с квадратом в области $\Omega \subset R_n$ (ограниченной или неограниченной) евклидова пространства R_n по мере σ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int\limits_{\Omega} f(x)\overline{g(x)}\, d\sigma.$$

Следствие 1. Пусть $D \subset L_2(\Omega, \sigma)$ — некоторое линейное многообразие функций, плотное в $L_2(\Omega, \sigma)$. Пусть, далее, последовательность вещественных измеримых функций $\omega_n(x)$ обладает следующими свойствами. Функции $\omega_n(x)$ являются мультипликаторами для D, т. е. если $u \in D$, то $\omega_n u \in D$; для любой $u(x) \in L_2(\Omega, \sigma)$ имеем $\omega_n(x) u(x) \in L_2(\Omega, \sigma)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \| u(x) - \omega_n(x) u(x) \| = 0, \quad u(x) \in L_2(\Omega, \sigma).$$

Если измеримая вещественная функция $h(x)$ такова, что из $u(x) \in D$ следует $u(x) h(x) \in L_2(\Omega, \sigma)$ и

$$\sup | h(x) \omega_n(x) | \leqslant M_n < \infty,$$

то, какова бы ни была комплексная константа β, $\operatorname{Im}\beta \neq 0$ и ограниченный самосопряженный в $L_2(\Omega, \sigma)$ оператор B, система функций вида

$$\{h(x) + \beta\} u(x) + Bu, \quad u \in D,$$

плотна в $L_2(\Omega, \sigma)$.

В самом деле, определим на D симметрический оператор A формулой $Au = h(x) u(x)$, $u \in D$; введем также в рассмотрение ограниченные самосопряженные операторы C_n по формулам $C_n u(x) = \omega_n(x) u(x)$, $u(x) \in L_2(\Omega, \sigma)$. Тогда наше утверждение является очевидным следствием теоремы 2.

Укажем еще одно следствие теоремы 2. Для этого обозначим через L_2 пространство $L_2(\Omega, \sigma)$ в том частном случае, когда Ω совпадает с n-мерным евклидовым пространством R_n, а σ — с обычной лебеговой мерой в R_n.

Следуя И. М. Гельфанду, обозначим через Z линейное многообразие функций $\psi(s) = \psi(s_1, s_2, \cdots, s_n)$, которые допускают аналитическое продолжение на все n-мерное комплексное пространство C_n и удовлетворяют неравенствам

$$|(\sigma_1 + i\tau_1)^{q_1} \cdots (\sigma_n + i\tau_n)^{q_n} \psi(\sigma_1 + i\tau_1, \ldots, \sigma_n + i\tau_n)| \leqslant C_q e^{a_1|\tau_1| + \cdots + a_n|\tau_n|}, \tag{1}$$

где C_q — константа.

Следствие 2. Если вещественная измеримая функция $h(s)$ (при вещественных s) допускает оценку

$$|h(s)| \leq C(1+|s_1|)^{q_1} \cdots (1+|s_n|)^{q_n}, \tag{2}$$

то, какова бы ни была комплексная константа β, $\operatorname{Im}\beta \neq 0$ и ограниченный самосопряженный в L_2 оператор B, многообразие функций вида

$$(h(s)+\beta)\psi(s)+B\psi, \quad \psi \in Z$$

плотно в L_2, иначе говоря, самосопряженный оператор умножения на функцию $h(s)$ является замыканием своего сужения на Z.

В самом деле, как известно ([1]), Z плотно в L_2 и состоит из преобразований Фурье всех финитных неограниченно дифференцируемых функций. Рассмотрим функцию

$$\chi(x,h) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varkappa h^n} e^{\frac{|x|^2}{|x|^2-h^2}}, & \text{при } |x| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2} < h \\ 0, & \text{при } |x| \geq h, \end{cases}$$

где

$$\varkappa = \int\limits_{|x|<1} e^{\frac{|x|^2}{|x|^2-1}} dx.$$

Легко видеть, что $\chi(x, h)$ — неограниченно дифференцируемая функция, оператор

$$T_h u = \int\limits_{R_n} \chi(x-y;\, h)\, u(y)\, dy$$

ограничен в $L_2(R_n)$ с нормой, не превосходящей единицы, и для всех $u \in L_2(R_n)$

$$\lim_{h\to 0} \| T_h u - u \| = 0.$$

Пусть

$$\omega_h(s) = \int\limits_{R_n} \chi(x;\, h)\, e^{i(x_1 s_1+\cdots+x_n s_n)}\, dx.$$

Тогда $\omega_h(s) \in Z$ и преобразование Фурье $T_h u$ для финитной бесконечно дифференцируемой функции $u(x)$ совпадает с $\omega_h(s)\bar{u}(s)$, где $\bar{u}(s) \in Z$ — преобразование Фурье функции $u(x)$. Кроме того, $\omega_h(s)$ вещественна в силу четности функции $\chi(x;h)$. Пользуясь еще равенством Парсеваля, легко видеть, что $\omega_{\frac{1}{n}}(s)$ $(n = 1, 2,\ldots)$ и $h(s)$ удовлетворяют всем условиям следствия 1 теоремы 2.

Отметим еще одно следствие указанной теоремы. Пусть на многообразии $\Omega \subset L_2(R_n)$ всех неограниченно дифференцируемых и финитных функций в n-мерном пространстве R_n определен оператор $A_\psi u$ формулой

$$A_\psi u = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{R^n} \psi(s) \tilde{u}(s) e^{-i(s_1x_1 + \cdots + s_nx_n)} ds, \tag{3}$$

где

$$\tilde{u}(s) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{R_n} u(x) e^{i(s_1x_1 + \cdots + s_nx_n)} dx,$$

а вещественная измеримая функция $\psi(s)$ допускает оценку (2).

Следствие 3. Пусть B — ограниченный самосопряженный оператор, действующий в $L_2(R_n)$, а оператор A_ψ определен на многообразии Ω по формуле (3). Тогда индексы дефекта оператора $A_\psi + B$ равны (0, 0). В частности, если дифференциальный оператор Au на Ω определен формулой

$$Au = \sum a_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \left(\frac{1}{i}\right)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \tag{4}$$

где все коэффициенты $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ — вещественные константы, то оператор $A + B$ имеет единственное самосопряженное расширение.

Чтобы сформулировать следующую теорему, обозначим ради краткости вновь через A_ψ замыкание оператора, определенного на многообразии Ω формулой (3), и заметим, что, согласно следствию 3 теоремы 2, этот оператор самосопряженный.

Теорема 3. *Пусть непрерывная комплекснозначная функция $q(x)$, заданная на всем R_n, стремится к нулю на бесконечности, а вещественная измеримая функция $\psi(s)$ стремится к бесконечности на бесконечности (т. е. при $|s| = \sqrt{s_1^2 + \cdots + s_n^2} \to \infty$) и допускает оценку* (2). *Тогда все точки непрерывного спектра оператора A_ψ принадлежат спектру оператора $Tu = A_\psi u + q^2 u$, причем точками спектра оператора T, лежащими вне спектра оператора A_ψ, могут быть лишь собственные значения, не имеющие предельных точек вне спектра оператора A_ψ.*

Пусть R_λ — резольвента оператора A_ψ. Согласно теореме 1, приведенной в работе автора [2], достаточно доказать, что оператор $qR_\lambda q$, состоящий в том, что функция $u \in L_2$ сначала умножается на q, затем к результату применяется оператор R_λ и, наконец, полученная функция снова умножается на q, — вполне непрерывен при всех невещественных λ. Предположим сперва, что $q(x)$ — финитная и неограниченно дифференцируемая функция. В силу унитарной эквивалентности оператора A_ψ оператору умножения на $\psi(s)$ и в силу того, что для любой функции $u(x) \in L_2$ имеем $q(x)u(x) \in L_2$, причем преобразование Фурье $\widetilde{qu}(s)$ произведения $q(x)u(x)$ равно

$$\widetilde{qu}(s) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int\limits_{|x|<R} q(x)\, u(x)\, e^{i(x_1 s_1 + \cdots + x_n s_n)}\, dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{R_n} \widetilde{q}(s-t)\, \widetilde{u}(t)\, dt,$$

где $\widetilde{q}$ и $\widetilde{u}$ являются преобразованиями Фурье соответственно функциям $q(x)$ и $u(x)$, оператору $qR_\lambda u$ в пространстве преобразований Фурье соответствует оператор

$$\widetilde{qR_\lambda u} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{R_n} \widetilde{q}(s-t)\, \frac{\widetilde{u}(t)}{\psi(t)-\lambda}\, dt.$$

Этот оператор вполне непрерывен в силу суммируемости $\widetilde{q}(s)$, поскольку $|\psi(t)| \to \infty$ при $|t| \to \infty$ и

$$\int\limits_{R_n} \left\{ \int\limits_{|t|>R} \left| \widetilde{q}(s-t)\, \frac{\widetilde{u}(t)}{\psi(t)-\lambda} \right| dt \right\}^2 ds \leq$$

$$\leq \int\limits_{R_n} \left\{ \int\limits_{|t|>R} |\widetilde{q}(s-t)|\, dt \cdot \int\limits_{|t|>R} |\widetilde{q}(s-t)|\, \frac{|\widetilde{u}(t)|^2}{|\psi(t)-\lambda|^2}\, dt \right\} ds \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{R_n} |\widetilde{q}(s)|\, ds \right)^2 \cdot \int\limits_{|t|>R} \frac{|\widetilde{u}(t)|^2}{|\psi(t)-\lambda|^2}\, dt \leq \max_{|t|>R} \left| \frac{1}{\psi(t)-\lambda} \right|^2 \left(\int\limits_{R_n} |\widetilde{q}(s)|\, ds \right)^2 \|u\|^2.$$

Таким образом, и оператор $qR_\lambda u$ вполне непрерывен. Ясно, что $q(x)$ можно теперь считать произвольной непрерывной финитной функцией, поскольку любая такая функция равномерно аппроксимируется финитными неограниченно дифференцируемыми функциями. Легко также видеть, что если $q(x)$ — любая непрерывная на вещественной оси функция, а $\chi_R(x)$ — характеристическая функция шара радиуса R с центром в начале координат, то оператор $\chi_R qR_\lambda u$ вполне непрерывен, ибо $\chi_R qR_\lambda = \chi_R q_1 R_\lambda$, где q_1 финитна и $q_1 = q$ внутри шара радиуса R. Наконец, легко видеть, что, если $q(x) \to 0$ на бесконечности, то оператор $qR_\lambda u$ равномерно аппроксимируется операторами вида $\chi_R qR_\lambda$. Таким образом, оператор qR_λ, а следовательно, и оператор $qR_\lambda q$, вполне непрерывен, что и доказывает теорему.

Следствие. Пусть дифференциальный оператор Au определен формулой (4) на многообразии Ω неограниченно дифференцируемых и финитных функций. Обозначим через $\overline{A}$ замыкание этого оператора. Тогда, если непрерывная комплекснозначная функция $q(x)$ стремится к нулю на бесконечности, то все точки непрерывного спектра оператора $\bar{A}$ принадлежат спектру оператора $Tu = \bar{A}u + qu$, причем точками спектра оператора T, лежащими вне спектра оператора $\bar{A}$, могуть быть лишь собственные значения, не имеющие предельных точек вне спектра оператора $\bar{A}$.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Հ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Որոշ օպերատորների սպեկտրի և դեֆեկտի ինդեքսների մասին

Աշխատանքում ստացված են հիմնականում հետևյալ արդյունքները.

Թեորեմ 1. Դիցուք R_λ-ն H հիլբերտյան տարածության մեջ որոշված A ինքնահամալուծ օպերատորի ռեզոլվենտն է և S-ը սահմանափակ գծային օպերատոր է: A օպերատորի անընդհատ սպեկտրի λ_0-կետը մնում է $T=A+S^2$ գրգռված օպերատորի անընդհատ սպեկտրի կետ, եթե որևէ իրական թվերի τ_n, $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n=0$ հաջորդականության համար տեղի ունի

$$\overline{\lim_n}\|SR_{\lambda_0+i\tau_n}S\| = q < 1$$

գնահատականը:

Թեորեմ 2. Դիցուք B-ն սահմանափակ ինքնահամալուծ օպերատոր է H հիլբերտյան տարածության մեջ և A-ն սիմետրիկ օպերատոր է: Որպեսզի $A+B$ օպերատորի դեֆեկտի ինդեքսները հավասար լինեն $(0, 0)$-ի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենա A օպերատորի հետ տեղափոխելի C_n սահմանափակ և ինքնահամալուծ օպերատորների այնպիսի հաջորդականություն, որ

$$\text{a)} \lim_{n\to\infty}\|C_n u - u\| = 0, \quad u\in H, \qquad \text{в)} \|AC_n u\| \leqslant M_n\|u\|, \quad u\in D_A:$$

Թեորեմ 3. Դիցուք A-ն մասնական ածանցյալներով հաստատուն գործակիցներով ինքնահամալուծ դիֆերենցիալ օպերատոր է որոշված ամբողջ R_n-էվկլիդյան տարածության մեջ: Եթե $q(x_1,\ldots,x_n)$ կոմպլեքս ֆունկցիան ձգտում է զերոյի անվերջում, ապա $\bar{A}$— օպերատորի անընդհատ սպեկտրի կետերը պատկանում են $Tu=Au+qu$ օպերատորի սպեկտրին, ընդորում A-օպերատորի սպեկտրից դուրս T օպերատորը կարող է ունենալ միայն սեփական արժեքներ, որոնք չեն կուտակվում այնտեղ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. М. Гельфанд* и *Г. Е. Шилов*, Обобщенные функции и действия над ними, вып. I, Физматгиз, М., 1958. [2] *Р. М. Мартиросян*, „Известия АН АрмССР", серия физ.-мат. наук, т. XIV, № 5 (1961).