

МАТЕМАТИКА

В. Г. Таирова

Критические точки и граничный индекс функций
 на конечнолистных римановых поверхностях

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 25/XII 1961)

В статье основная теорема М. Морса ⁽¹⁾ распространяется на случай, когда функции заданы не в однолистной области, а на конечнолистной римановой поверхности. Обобщению результатов М. Морса на случай, когда функции заданы на конечнолистной римановой поверхности, посвятил свою статью ⁽²⁾ И. М. Мельник, но метод, которым он пользовался, заставил его наложить обременительные условия на рассматриваемый им класс римановых поверхностей. В нашей работе на класс римановых поверхностей никаких дополнительных ограничений не налагается. Пользуемся случаем поблагодарить И. М. Мельника за ценные обсуждения.

Пусть R — λ -листная риманова поверхность, накрывающая z -плоскость, ограниченная α замкнутыми кривыми B_j , $j = 1, \dots, \alpha$, ориентированными так, что при обходе B_j в направлении, указанном ориентацией, риманова поверхность остается слева; n_j -угловой порядок ⁽¹⁾ проекции B_j на z -плоскость с ориентацией, индуцированной ориентацией B_j .

Пусть $w(z)$ — аналитическая или псевдоаналитическая* ^(1,3) на R функция, которая не имеет других особых точек, кроме точек ветвления и, возможно, конечного числа полюсов.

В дальнейшем будем полагать, что функция $w(z)$ — аналитическая функция, переход к случаю псевдоаналитической функции не вызывает дополнительных трудностей. Известно, что такая функция может быть представлена элементами вида:

$$\sum_{j=\mu'}^{\infty} a_j (z - z_0)^{-\frac{j}{\nu}} + a_0 = P_{z_0}(z - z_0), \text{ если } z_0 \neq \infty$$

$$\sum_{j=\mu'}^{\infty} a_j z^{-\frac{j}{\nu}} + a_0 = P_{\infty}(z),$$

где a_j — комплексные числа, $a_{\mu'} \neq 0$, $\mu' \neq 0$, $\nu \geq 1$, причем $\nu > 1$, если над z_0 лежит точка ветвления ν — 1-го порядка. Штрих у знака суммы означает, что $j \neq 0$.

* У Морса псевдоаналитическая функция называется функцией, которая дает внутреннее отображение в смысле С. Стоилова.

Точку z_0 назовем обыкновенной, если $|\mu'| = \nu = 1$. В остальных случаях точку z_0 будем называть критической, а число $\mu = |\mu'|$ — порядком функции $w(z)$ в точке z_0 . Пусть функция $w = w(z)$ отображает риманову поверхность R на риманову поверхность R' над w -плоскостью взаимно-однозначно. Тогда $\mu - 1$ — порядок точки ветвления R' в точке $w_0 = w(z_0)$.

Найдем соотношения, связывающие суммарный угловой порядок граничных кривых римановой поверхности R , граничный индекс функции $u(x, y) = \operatorname{Re} w(z)$ и числа μ и ν , характеризующие критические точки функции.

Пусть $w(z)$ не имеет на R других особых точек, кроме точек ветвления. Следуя Морсу⁽¹⁾, обозначим через U_c замкнутое множество точек на R , в которых $u(x, y) \leq c$, а через E_c — эйлерову характеристику U_c . Так же, как у Морса, можно показать, что при возрастании c характеристика E_c изменяется только при прохождении $u(x, y) = c$ через точки относительного минимума и в случае, когда на кривой $u(x, y) = c$ есть критические точки, а также, что

$$E = m - S - s, \quad (1)$$

где E — эйлерова характеристика R , m — число точек относительного минимума $u(x, y)$ на R , $S(s)$ — число седловых точек на R (на границе R).

Точка $z_0 = x_0 + iy_0$ является внутренней седловой точкой функции $u(x, y) = \operatorname{Re} w(z)$ тогда и только тогда, когда $t = 0$ является нулем $\frac{d}{dt} P_{z_0}(t^s)$; при этом кратность седловой точки равна кратности нуля $\frac{d}{dt} P_{z_0}(t^s)$. Следовательно из (1) вытекает.

Теорема 1. Пусть $w(z)$ — аналитическая или псевдоаналитическая на римановой поверхности R функция, не имеющая других особых точек, кроме точек ветвления*, тогда

$$-\sum (\mu_i - 1) = E + J, \quad (2)$$

где сумма распространяется на все критические точки функции $w(z)$, μ_i — их порядки, $J = s - m$ — граничный индекс функции** $u(x, y) = \operatorname{Re} w(z)$.

Отметим, что равенство (2) — топологическое соотношение. Но в некоторых задачах возникает необходимость знать $\sum (\nu_i - 1) = -\sum (\mu_i - 1)$, где $\nu_i - 1$ порядок i -ой точки ветвления R . Числа ν_i не

* Как будет вытекать из дальнейшего, формула (2) справедлива и в случае, когда $w(z)$ имеет на R конечное число полюсов.

** Для простоты полагаем, что для функции $u(x, y)$ выполняются граничные условия А⁽¹⁾.

являются топологическими инвариантами (относительно топологических отображений R), поэтому все соотношения, которые содержат ν_i , уже не носят топологический характер.

Допустим сначала, что R — ограниченная риманова поверхность, т. е. поверхность, накрывающая ограниченную область в z -плоскости. Пусть E_q , $q = 1, \dots, \lambda$, — эйлерова характеристика открытого множества K_q на z -плоскости, над каждой точкой которого лежит по крайней мере q внутренних точек поверхности R . Тогда ⁽⁴⁾

$$E = \sum_{q=1}^{\lambda} E_q - \sum (\nu_i - 1), \text{ где вторая сумма распространяется на все}$$

точки ветвления поверхности R . Учитывая это, из (2) получаем

$$\sum (\nu_i - 1) - \sum (\mu_i - 1) = \sum_{q=1}^{\lambda} E_q + J, \quad (3)$$

где суммы распространяются на все критические точки функции $w(z)$.

Не уменьшая общности, можем полагать, что кривая, являющаяся проекцией граничной кривой поверхности R на z -плоскость, имеет не более конечного числа точек самопересечения. Проекции граничных кривых на z -плоскости разобьем на конечное число жордановых дуг $\{\Gamma_k\}$, $k = 1, \dots, n$, причем у двух различных дуг общими могут быть только концы. Каждую дугу множества ориентируем, т. е. указываем ее начало и конец таким образом, чтобы при обходе соответствующей дуги границы поверхности R в направлении от начала к концу поверхность R оставалась слева. Множеству ориентированных дуг $\{\Gamma_k\}$ поставим в соответствие множество угловых порядков этих дуг $\{\gamma_k\}$.

Нетрудно показать, что ориентированные границы открытых множеств K_q состоят из дуг $\{\Gamma_k\}$, причем каждая дуга множества входит как составляющая в границу одного и только одного открытого множества K_q , $q = 1, \dots, \lambda$. Кроме того, отметим, что угловой порядок ориентированной границы K_q равен E_q . Следовательно,

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i = \sum_{q=1}^{\lambda} E_q. \text{ Отсюда}$$

$$\sum (\nu_i - 1) - \sum (\mu_i - 1) = \sum_{i=1}^{\alpha} n_i + J, \quad (4)$$

где α — число граничных кривых римановой поверхности R , а n_i , $i = 1, \dots, \alpha$, — их угловые порядки.

Пусть теперь R не обязательно ограниченная риманова поверхность, а $w(z)$ не имеет полюсов. Пусть над ∞ лежит l ($l \leq \lambda$) точек римановой поверхности R (если над ∞ лежит точка ветвления порядка $r - 1$, то ее считаем r раз). Тогда среди K_q , $q = 1, \dots, \lambda$ есть l множеств, содержащих ∞ . А E_q для открытого множества K_q , содержащего ∞ , равна увеличенной на две единицы сумме угловых

порядков дуг множества $\{\Gamma_k\}$, которые входят в состав границы K_q . Следовательно,

$$\sum (\nu_i - 1) - \sum (\mu_i - 1) = \sum_{i=1}^{\alpha} n_i + 2l + J, \quad (5)$$

где суммы распространяются на все критические точки функции $w(z)$.

Допустим теперь, что $w(z)$ может иметь конечное число полюсов.

Лемма* (3). Пусть $t=0$ — полюс функции $P_{z_0}(t')$ порядка n . Существует такая замкнутая кривая β , ограничивающая достаточно малую окрестность $z=z_0 \in R$, которая не содержит внутренних седловых точек, что привзнос J_β граничного индекса функции $u(x, y)$ относительно поверхности, не содержащей $z=z_0$, равен $-n$.

Удалив из поверхности R окрестности полюсов, о которых идет речь в лемме, получим поверхность R^* , которая уже не содержит полюсов и для которой выполняется (1), т. е. $E^* = m^* - S - s^*$, где E^* — эйлерова характеристика R^* , m^* — число точек относительного минимума $u(x, y)$ на R^* , $S(s^*)$ — число седловых точек на R (на границе R).

По лемме $m^* - s^* = m - s - \sum_{i=1}^k \mu'_i$, где m — число точек относительного минимума $u(x, y)$ на R , k — число полюсов функции $w(z)$; а сумма берется по всем полюсам $w(z)$. Эйлерова характеристика E поверхности R равна $E^* + k$. Пусть l' — число точек R' , которые лежат над ∞ , тогда $l' = \sum_{i=1}^k \mu_i$. Отсюда получаем $E = m - s - \sum_{i=1}^k (\mu'_i -$

$$- 1) = m - s - S - \sum_{i=1}^k (\mu_i - 1) + 2l', \text{ т. е. справедлива}$$

Теорема 2. Пусть $w(z)$ аналитическая или псевдоаналитическая на римановой поверхности R функция, не имеющая других особых точек, кроме точек ветвления и, возможно, конечного числа полюсов. Тогда

$$\sum (\nu_i - 1) - \sum (\mu_i - 1) = \sum_{i=1}^{\alpha} n_i + 2(l - l') + J, \quad (6)$$

$$\sum (\nu_i - 1) - \sum (\mu'_i - 1) = \sum_{i=1}^{\alpha} n_i + 2l + J, \quad (6')$$

где суммы распространяются на все критические точки функции $w(z)$, α — число граничных кривых римановой поверхности R , n_i , $i = 1, \dots, \alpha$, — угловые порядки ориентированных граничных кривых, $l(l')$ — число точек $R(R')$, лежащих над ∞ , J — граничный индекс функции $u(x, y) = \operatorname{Re} w(z)$.

* Лемма справедлива и для полюса функции $P_{\infty}(t')$.

Следствие. Если $z = z(w)$ — функция на R' , обратная $w = w(z)$, J' — ее граничный индекс на R' , n'_i — угловой порядок граничной кривой B'_i на R' , то $\sum_{i=1}^n n'_i + J' = -\left(\sum_{i=1}^n n_i + J\right)$.

Покажем теперь, что из (6') вытекает упомянутый выше результат И. М. Мельника. Пусть $\bar{R}$ — λ -листная замкнутая риманова поверхность; R — λ -листная ограниченная риманова поверхность такая, что $R \subset \bar{R}$. Точку z_0 на z -плоскости, над которой не лежат точки ветвления поверхности $\bar{R}$, соединим жордановыми кривыми с проекциями точек ветвления поверхности $\bar{R}$. Разрежем риманову поверхность $\bar{R}$ по всем кривым, проекциями которых являются упомянутые жордановы кривые. Тогда риманова поверхность $\bar{R}$ распадется на λ областей, которые мы будем называть листами римановой поверхности $\bar{R}$. При этом R также распадется на λ листов, но они, вообще говоря, не будут областями.

Пусть риманова поверхность R такая, что: 1°. каждый ее лист является областью; 2°. поверхность R может быть гомеоморфно отображена так, что все однолистные области и только они перейдут в однолистные области, и каждая кривая B_i перейдет в кривую B_i^* , которая проектируется на z -плоскости в окружность.

Равенство (6') перепишем так:

$$\sum (v_i - 1) - \sum (p'_i - 1) = \sum n_i^+ + \sum n_i^- + J,$$

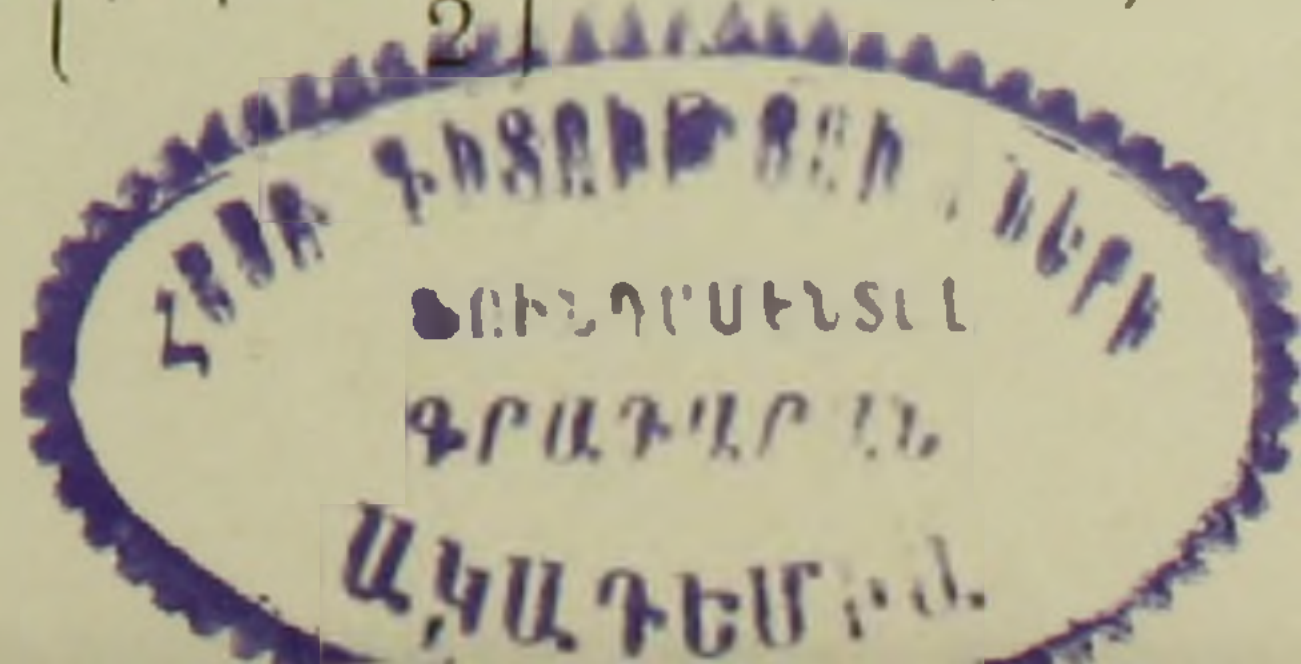
где $n_i^+ = \max(n_i, 0)$, $n_i^- = \min(n_i, 0)$.

Очевидно, что $\sum n_i^+ = \lambda$, следовательно,

$$\sum (v_i - 1) - \sum (p'_i - 1) = 2\lambda - \sum |n_i| + J. \quad (7)$$

Легко видеть, что (7) справедливо также, если снять условие ограниченности R . Формула (7) является основным результатом И. М. Мельника. Легко построить примеры, показывающие, что для справедливости (7) ограничения 1° и 2° существенны. Приведем пример, доказывающий существенность ограничения 2°.

Пример. Пусть R состоит из двух листов $S_1: \left\{ |z| < \frac{1}{8}, 0 < \arg z < 2\pi \right\}$ и $S_2: \text{область } \left\{ |z| < 2, |z - 1| < \frac{1}{2} \right\}$ с разрезом вдоль $\text{Im } z = 0, 0 < \text{Re } z < \frac{1}{2}$, соединенных вдоль этого разреза. R ограничена двумя кривыми Γ_1 и Γ_2 , которые проектируются соответственно в $|z| = 2$ и в $\left\{ |z - 1| = \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ |z| = \frac{1}{2} \right\}$. Очевидно, $\lambda = 2$, $|n_1| = 1$,



$|n_2|=0$. Рассмотрим на R функцию $w = \sqrt{z(z-1)}$, $z=0$ — критическая точка этой функции на R с $\nu=2$, $\mu=1$. Легко видеть, что $J=0$. Равенство (7) не справедливо.

Пусть $u(x, y)$ — гармоническая или псевдогармоническая ⁽¹⁾ на римановой поверхности R функция.

Распространяя метод Морса ⁽¹⁾ на этот случай, как и выше, получаем такую теорему.

Теорема 3. Пусть $u(x, y)$ — функция гармоническая или псевдогармоническая на римановой поверхности R , за исключением, возможно, M логарифмических полюсов, тогда

$$-\sum (\nu_i - 1) + M = E + J, \quad (8)$$

$$\sum (\nu_i - 1) - \sum (\mu_i - 1) + M = \sum_{i=1}^n n_i + 2l + J, \quad (9)$$

где суммы слева распространяются на все точки ветвления R и на все седловые точки $u(x, y)$, $\mu_i - 1$ — порядки седловых точек, J — граничный индекс $u(x, y)$, α , n_i , ν_i , l означают то же, что и выше.

Ужгородский государственный
университет

Վ. Գ. ՏԱԻՐՈՎԱ

Ֆունկցիաների կրիտիկական կետերը և եզրային ինդեքսը վերջավոր քերթանի ռիմանյան մակերևույթի վրա

⁽¹⁾ աշխատանքի հիմնական թեորեմը տարածվում է այն ֆունկցիաների վրա, որոնք տված են վերջավոր թերթանի ռիմանյան մակերևույթների վրա: Արդյունքներից մեկը հետևյալն է՝

Թեորեմ 1. Եթե $w(z)$ -ը անալիտիկ կամ փսևոանալիտիկ է R ռիմանյան մակերևույթի վրա և բացի ճյուղավորման կետերից չունի ուրիշ եզակի կետեր, ապա՝

$$-\sum (\nu_i - 1) = E + J$$

որտեղ գումարը տարածված է $w(z)$ ֆունկցիայի բոլոր կրիտիկական կետերով, ν_i -ն նրանց կարգն է, E -ն R -ի էյլերյան խարակտերիստիկն է, իսկ $J = s - m$ -ը $u(x, y) = \operatorname{Re} w(z)$ -ֆունկցիայի եզրային ինդեքսն է:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆ ՈՒԹՅՈՒՆ

¹ М. Морс, Топологические методы теории функций комплексного переменного, ИЛ, 1951. ² И. М. Мельник, Изв. АН СССР (сер. мат.), 25, 815—824 (1961). ³ Ф. Д. Гахов и Ю. М. Крукунов, Изв. АН СССР (сер. мат.), 20, 207—240 (1956). ⁴ Р. Неванlinna, Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, 1941.