ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXIV 1962 1

МАТЕМАТИКА

С. А. Акопян

Об одном интегральном преобразовании

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 26/XII 1961)

В работах М. М. Джрбашяна ([1-3]) была предложена общая конструкция построения теории интегральных преобразований типа Ватсона—Планшереля на лучах в комплексной области. В настоящей работе при помощи указанной общей конструкции строится интегральное преобразование в комплексной области, ядром которого служит функция вида

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+\vartheta)^{\frac{k}{\rho_1}+\mu_1}\left[\Gamma\left(\frac{k}{\rho_2}+\mu_2\right)\right]^{\frac{1}{\rho_3}}}, \tag{1}$$

где параметры ϑ, ρ_1, ρ_2, ρ_3 — положительные, а μ_1 и μ_2 — произвольные. Функция $F(z)$—целая порядка

$$\rho=\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2\rho_3}\right)^{-1} \tag{2}$$

и типа $$\sigma=\left(\frac{1}{\rho e}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1}}\left(\frac{\rho_2}{\rho}\right)^{\frac{\rho}{\rho_2\rho_3}}=\frac{1}{\rho e}(\rho_2 e)^{\frac{\rho}{\rho_2\rho_3}}. \tag{3}$$

При частных значениях параметров функция $F(z)$ совпадает с хорошо известными функциями: типа Миттаг—Лефлера, Линделефа и других.

Для построения интегрального преобразования в $L_2(0,\infty)$, ядром которого являются значения функции $F(z)$ на определенных лучах комплексной плоскости z, необходимо установить вид преобразования Меллина для $F(re^{i\alpha})$ $(\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1)$. С этой целью введем в рассмотрение следующую функцию

$$\Phi(s;\alpha)=\frac{\pi\rho e^{i\rho(\pi-\alpha)(s+\mu-1)-\left[\mu_1-\frac{\rho}{\rho_1}(s+\mu-1)\right]\log[\vartheta-\rho(s+\mu-1)]}}{\sin\pi\rho(s+\mu-1)\left[\Gamma\left(\mu_2-\frac{\rho}{\rho_2}(s+\mu-1)\right)\right]^{\frac{1}{\rho_3}}}, \tag{4}$$

мероморфную в плоскости комплексного переменного s $(s = r + it)$, разрезанной вдоль луча $\left[1 - \mu + \frac{1}{\rho}\min(\vartheta, \mu_2\rho_2), +\infty\right)\Big]$.

На входящие в эту функцию параметры с самого начала наложим следующие ограничения:

а) $$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2\rho_3}; \tag{5}$$

б) $$\mu = \mu_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_3}\left(\mu_2 - \frac{1}{2}\right); \tag{6}$$

в) для данного $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ (7)

$$\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}.$$

Лемма 1. *Пусть параметр μ удовлетворяет условию*

$$\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}\min(1; \vartheta), \tag{8}$$

тогда $$\sup_{-\infty < t < \infty}\left|\Phi\left(\frac{1}{2} + it; \alpha\right)\right| < +\infty. \tag{9}$$

Действительно, в силу (8) функция $\Phi(s; \alpha)$ не имеет ни полюсов, ни логарифмических особенностей на линии $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, поэтому достаточно лишь убедиться в том, что при $|t| \to \infty$ функция $\Phi\left(\frac{1}{2} + it; \alpha\right)$ остается ограниченной. С этой целью воспользуемся формулой

$$|\Gamma(r + it)| = O\left(|t|^{r - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\right), \quad |t| \to \infty \tag{10}$$

и заметим, что при $t \to +\infty$

$$\log\left[\vartheta - \rho\left(\mu - \frac{1}{2}\right) \pm i\rho t\right] = \log t \pm i\frac{\pi}{2} + \log\rho + O\left(\frac{1}{t}\right). \tag{11}$$

Ввиду (10) и (11) имеем при $t \to +\infty$

$$\left|\Phi\left(\frac{1}{2} + it; \alpha\right)\right| = O\left(e^{-2\pi\rho t + \alpha\rho t + \frac{\pi}{2}t}\right),$$

$$\left|\Phi\left(\frac{1}{2} - it; \alpha\right)\right| = O\left(e^{-\alpha\rho t + \frac{\pi}{2}t}\right),$$

откуда в силу (7) следует ограниченность функции $\Phi\left(\frac{1}{2} + it; \alpha\right)$ при $|t| \to +\infty$.

Лемма 2 *При выполнении условия*

$$\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}\min(1; \vartheta; \mu_2\rho_2) \tag{12}$$

имеет место равенство:

$$\frac{1}{2\pi i} \underset{a \to \infty}{\text{l. i. m.}} \int\limits_{\frac{1}{2}+ia}^{\frac{1}{2}+ia} \frac{\Phi(s;\alpha)}{1-s} x^{-s} ds = \frac{1}{x} \int\limits_0^x F\left(e^{i\alpha} t^{\frac{1}{\rho}}\right) t^{\mu-1} dt, \quad (0 < x < \infty) \tag{13}$$

Доказательство. В силу условия (12) функция

$$\Phi(1-s;\alpha) = \frac{\pi\rho e^{i\rho(\pi-\alpha)(\mu-s) - \left[\mu_1 - \frac{\rho}{\rho_1}(\mu-s)\right] \log[\vartheta - \rho(\mu-s)]}}{\sin \pi\rho(\mu-s) \left[\Gamma\left(\mu_2 - \frac{\rho}{\rho_2}(\mu-s)\right)\right]^{\frac{1}{\rho_3}}}$$

регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geqslant \frac{1}{2}$, кроме точек

$$s_k = \frac{k}{\rho} + \mu \quad (k = 0, 1, 2, \cdots),$$

где она имеет простые полюсы. Заметим, что

$$\operatorname*{Res}_{s=s_k} \frac{\Phi(1-s;\alpha)}{s} x^{s-1} = -\frac{e^{i\alpha k} x^{\frac{k}{\rho}+\mu-1}}{(k+\vartheta)^{\frac{k}{\rho_1}+\mu_1} \left[\Gamma\left(\frac{k}{\rho_2}+\mu_2\right)\right]^{\frac{1}{\rho_3}} \left(\frac{k}{\rho}+\mu\right)}$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots). \tag{14}$$

Пусть $R_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\rho} + \mu$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, а L_n означает контур области D_n, являющийся пересечением круга $|s| < R_n$ с полуплоскостью $\operatorname{Re} s \geqslant \frac{1}{2}$. Функция

$$\frac{\Phi(1-s;\alpha)}{s} x^{s-1} \qquad (0 < x < \infty)$$

голоморфна в области D_n, кроме точек $s_k = \frac{k}{\rho} + \mu$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$, где она имеет простые полюсы с вычетами (14). Поэтому для $x \in (0, +\infty)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\overset{\frown}{L_n}} \frac{\Phi(1-s;\alpha)}{s} x^{s-1} ds =$$

$$= x^{\mu-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(e^{i\alpha} x^{\frac{1}{\rho}}\right)^k}{(k+\vartheta)^{\frac{k}{\rho_1}+\mu_1} \left[\Gamma\left(\frac{k}{\rho_2}+\mu_2\right)\right]^{\frac{1}{\rho_3}} \left(\frac{k}{\rho}+\mu\right)} =$$

$$= -\frac{1}{x}\int_0^x \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{(e^{i\alpha} t^{\frac{1}{\rho}})^k}{(k+\vartheta)^{\frac{k}{\rho_1}+\mu_1} \left| \Gamma\left(\frac{k}{\rho_2}+\mu_2\right) \right|^{\frac{1}{\rho_3}}} \right\} t^{\mu-1}\, dt. \tag{15}$$

Пусть $\frac{1}{2} \pm R_n^*$ — точки пересечения окружности $|s| = R_n$ с прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, так как $R_n^* = \sqrt{R_n^2 - \frac{1}{4}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^* = \infty$. Напишем формулу (15) в развернутом виде:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-iR_n^*}^{\frac{1}{2}+iR_n^*} \frac{\Phi(1-s;\alpha)}{s} x^{s-1}\, ds =$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^x \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{(e^{i\alpha} t^{\frac{1}{\rho}})^k}{(k+\vartheta)^{\frac{k}{\rho_1}+\mu_1} \left| \Gamma\left(\frac{k}{\rho_2}+\mu_2\right) \right|^{\frac{1}{\rho_3}}} \right\} t^{\mu-1}\, dt + Y_n(x), \tag{16}$$

где

$$Y_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{|s| = R_n \\ \operatorname{Re} s \geq \frac{1}{2}}} \frac{\Phi(1-s;\alpha)}{s} x^{s-1}\, ds, \quad x \in (0, +\infty). \tag{17}$$

Оценим теперь $Y_n(x)$. Воспользуемся оценкой

$$|\Gamma(a + Re^{i\varphi})| = O\left(R^{R\cos\varphi + a - \frac{1}{2}} e^{-R(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi)}\right), \tag{18}$$

справедливой при любом $a \in (-\infty, +\infty)$, когда $R \to \infty$ и $|\varphi| \leq \pi - \delta$ ($\delta > 0$) (при этом порядок правой части равномерен относительно всех значений $|\varphi| \leq \pi - \delta$), и неравенством ([1])

$$\left| \frac{e^{i\rho(\mu-s)(\pi-\alpha)}}{\sin \pi\rho(\mu - s)} \right| \leq$$

$$\leq \begin{cases} 2\sqrt{2}\exp\{\rho R_n[(\pi-\alpha)\sin\varphi - \pi|\sin\varphi|]\}, & \text{если } \frac{\pi}{4} \leq |\varphi| \leq \frac{\pi}{2} \\ \exp\{\rho R_n(\pi-\alpha)\sin\varphi\}, & \text{если } |\varphi| \leq \frac{\pi}{4} \end{cases} \tag{19}$$

при $s = R_n e^{i\varphi}$, $n \geq n_0$.

Предположим, что ρ_2 отлично от ∞, в противном случае, если $\rho_2 = \infty$, то положим $\mu_2 = \frac{1}{2}$, тогда из (18) следует, что при $s = R_n e^{i\varphi}$ и $n \geq n_0$

$$\left|\left[\Gamma\left(\mu_2 - \frac{\rho}{\rho_2}\mu + \frac{\rho}{\rho_2}R_n e^{i\varphi}\right)\right]^{\frac{1}{\rho_3}}\right| =$$

$$= O\left(\left(\frac{R_n\rho}{\rho_2}\right)^{-\frac{\rho}{\rho_2\rho_3}R_n\cos\varphi - \frac{1}{\rho_3}\left(\mu_2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{\rho}{\rho_2\rho_3}\mu} e^{\frac{\rho}{\rho_2\rho_3}R_n(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi)}\right). \quad (20)$$

Заметим также, что при $s = R_n e^{i\varphi}$, $n \geqslant n_0$

$$\left| e^{-\left[\mu_1 - \frac{\rho}{\rho_1}(\mu - s)\right]\log[\vartheta - \rho(\mu - s)]}\right| =$$

$$= O\left(e^{-\left(\mu_1 - \frac{\rho}{\rho_1}\mu + \frac{\rho}{\rho_1}R_n\cos\varphi\right)\log\rho R_n + \frac{\rho}{\rho_1}R_n\varphi\sin\varphi}\right). \quad (21)$$

Обозначая через c_i $(i = 1, 2, \cdots)$ — постоянные, не зависящие от n, имеем, что при $s = R_n e^{i\varphi}$, $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $n \geqslant n_0$

$$|\Phi(1 - s; \alpha)\, x^s| \leqslant c_1 R_n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sigma e x}{R_n}\right)^{R_n\cos\varphi} e^{-R_n(\rho\alpha - \varphi)\sin\varphi},$$

а при $$-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant -\frac{\pi}{4}$$

$$|\Phi(1 - s; \alpha)\, x^s| \leqslant c_2 R_n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sigma e x}{R_n}\right)^{R_n\cos\varphi} e^{-R_n[\rho(2\pi - \alpha) + \varphi]|\sin\varphi|}.$$

Но ввиду (7) из этих оценок следует, что при $s = R_n e^{i\varphi}$, $\frac{\pi}{4} \leqslant |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}$, $n \geqslant n_0$,

$$|\Phi(1 - s; \alpha)\, x^s| \leqslant c_3 R_n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sigma e x}{R_n}\right)^{R_n\cos\varphi}. \quad (22)$$

Далее, при $|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{4}$, $n \geqslant n_0$ получим

$$|\Phi(1 - s; \alpha)\, x^s| \leqslant c_4 R_n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{c_5\sigma e x}{R_n}\right)^{R_n\cos\varphi}. \quad (22')$$

Неравенства (22), (22′) дают возможность оценить интеграл (17) и показать, что

$$\lim_{n\to\infty} Y_n(x) = 0 \quad x \in (0, +\infty) \quad (23)$$

В тождестве (16), переходя к пределу при $n \to \infty$, ввиду (23) будем иметь

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-iR_n^*}^{\frac{1}{2}+iR_n^*}\frac{\Phi(1-s;\alpha)}{s}x^{s-1}ds =$$

$$=\frac{1}{x}\int\limits_0^x F\left(e^{i\alpha}t^{\frac{1}{\rho}}\right)t^{\mu-1}\,dt,\quad x\in(0,+\infty). \tag{24}$$

Равенство (24) сохраняется и в том случае, если в его левой части числа R_n^* заменить любыми числами a_n, удовлетворяющими условию

$$a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots,\ \lim_{n\to\infty}a_n=\infty.$$

На этом доказательство формулы (13) заканчивается.

В дальнейшем будем обозначать

$$\Phi^{(+)}(s)=\Phi\left(s;\frac{\pi}{2\rho}\right);\quad \Phi^{(-)}(s)=\Phi\left(s;2\pi-\frac{\pi}{2\rho}\right)$$

и введем следующие функции

$$H^{(\pm)}(s)=e^{\pm i\frac{\pi}{2}s}\,e^{\left[\mu_1-\frac{\rho}{\rho_1}(\mu-s)\right]\log[\vartheta-\rho(\mu-s)]}\left|\Gamma\left(\mu_2-\frac{\rho}{\rho_2}(\mu-s)\right)\right|^{\frac{1}{\rho_2}}. \tag{25}$$

Функции $\Phi^{(\pm)}(s)$ и $H^{(\pm)}(s)$ на всей плоскости комплексного переменного s связаны соотношением

$$e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\Phi^{(+)}(s)\,H^{(-)}(1-s)+e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\Phi^{(-)}(s)\,H^{(+)}(1-s)=2\pi\rho. \tag{26}$$

Лемма 2. *При условии*

$$\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}\min(\vartheta;\mu_2\rho_2) \tag{27}$$

имеет место

$$\sup_{-\infty<t<\infty}\left|H^{(\pm)}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|<+\infty. \tag{28}$$

Действительно, при выполнении условия (27) функции $H^{(\pm)}(s)$ не имеют особенностей на линии $\operatorname{Re}s=\frac{1}{2}$, а при $|t|\to\infty$ имеем

$$\left|H^{(\pm)}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|=O\left(e^{-\frac{\pi}{2}(|t|\pm t)}\right)=O(1).$$

По теореме Меллина ([4]) существуют пределы в среднем

$$\frac{1}{2\pi i}\,\underset{a\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\frac{H^{(\pm)}(s)}{1-s}x^{-s}\,ds=\frac{h^{(\pm)}(x)}{x}\in L_2(0,+\infty).$$

Далее, обозначая

$$k^{(\pm)}(x)=\int_0^x F\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}t^{\frac{1}{\rho}}\right)t^{\mu-1}\,dt,$$

мы можем сформулировать следующую теорему, доказательство которой мы не приводим, так как оно не отличается от доказательств соответствующих теорем работ ([1-3]).

Теорема. *Пусть*

1) $\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2\rho_3}<2$

2) $\frac{1}{2}<\mu=\mu_1+\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho_3}\left(\mu_2-\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}\min(1;\,\vartheta;\,\mu_2\rho_2),$

где параметры ϑ *и* $\mu_2>0$, *причем при* $\rho_2=\infty$ *примем* $\mu_2=\frac{1}{2}$.

Тогда

а) *для любой функции* $g(y)\in L_2(0,\infty)$ *формула*

$$f^{(\pm)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\frac{d}{dy}\int_0^\infty\frac{k^{(\pm)}(xy)}{y}g(y)\,dy$$

определяет почти всюду функции $f^{(\pm)}(x)$, *принадлежащие классу* $L_2(0,+\infty)$; *двойственная формула*

$$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{d}{dy}\int_0^\infty\frac{h^{(+)}(xy)}{y}f^{(-)}(x)\,dx+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{d}{dy}\int_0^\infty\frac{h^{(-)}(xy)}{x}f^{(+)}(x)\,dx$$

также имеет место почти всюду на $(0,\infty)$;

б) *обратно, для любой функции* $f(x)\in L_2(0,\infty)$ *формула*

$$g^{(\pm)}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\frac{d}{dy}\int_0^\infty\frac{h^{(\pm)}(xy)}{x}f(x)\,dx$$

определяет почти всюду на $(0,\infty)$ *функции* $g^{(\pm)}(y)\in L_2(0,\infty)$. *Двойственная формула*

$$f^{(\pm)}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{d}{dx}\int_0^\infty\frac{k^{(-)}(xy)}{y}g^{(+)}(y)\,dy+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\, e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^\infty \frac{k^{(+)}(xy)}{y}\, g^{(-)}(y)\, dy$$

также имеет место почти всюду на $(0, \infty)$.

Рассмотрим теперь некоторые специальные случаи полученного результата.

а) Положим $\mu_2 = \rho_2 = 1$, $\rho_3 = \infty$, тогда

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+\vartheta)^{\frac{k}{\rho}+\mu_1}} \equiv F_1(z),$$

и при условии

$$\frac{1}{2} < \mu = \mu_1 + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}\min(1; \vartheta) \quad \left(\rho > \frac{1}{2}\right)$$

функция

$$k_1^{(\pm)}(x) = \int\limits_0^x F_1\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}} t^{\frac{1}{\rho}}\right) t^{\mu-1}\, dt$$

является ядром интегрального преобразования. Отметим связь этой функции с функцией типа Линделефа

$$L_\rho(z; \mu) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{\frac{n}{\rho}+\mu}},$$

предложенной М. М. Джрбашяном. Если

$$L_\rho^*(z; \mu) = \frac{L_\rho(z; \mu) - 1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)^{\frac{n}{\rho}+\frac{1}{\rho}+\mu}},$$

то очевидно, что при $\vartheta = 1$

$$F_1(z) = L_\rho^*\left(z; \mu_1 - \frac{1}{\rho}\right).$$

б) Полагая $\rho_1 = \infty$, $\rho_2 = \mu_2 = 1$, имеем

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+\vartheta)^{\mu_1}(k!)^{\frac{1}{\rho}}} \equiv F_2(z),$$

и при условии

$$\frac{1}{2} < \mu = \mu_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\rho} < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}\min(1; \vartheta)$$

функция

$$k_2^{(\pm)}(x) = \int\limits_0^x F_2\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}} t^{\frac{1}{\rho}}\right) t^{\mu-1}\, dt$$

является ядром интегрального преобразования.

в) $\rho_1 = \infty$, $\rho_3 = 1$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+\vartheta)^{\mu_1}\Gamma\left(\frac{k}{\rho}+\mu_2\right)} \equiv F_3(z),$$

и при условии

$$\frac{1}{2} < \mu = \mu_1 + \mu_2 < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}\min(1;\ \vartheta;\ \mu_2\rho)$$

функция

$$k_3^{(\pm)}(x) = \int_0^x F_3\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}} t^{\frac{1}{\rho}}\right) t^{\mu-1}\,dt$$

также является ядром интегрального преобразования. Очевидно, что при $\mu_1 = 0$ имеем $\mu_2 = \mu$ и при условии

$$\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$$

ядром преобразования будет служить функция типа Миттаг—Лефлера.

Отметим, что этот случай, с вытекающими оттуда важными следствиями о параметрическом представлении целых функций, впервые был исследован в работе (1).

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Մ. Մ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Մի ինտեգրալ ձևափոխության մասին

Ներկա աշխատանքում կառուցված է մի ինտեգրալ ձևափոխության L_2—տեսությունը, որի համար կորիզ է ծառայում

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+\vartheta)^{\frac{k}{\rho_1}+\mu_1}\left[\Gamma\left(\frac{k}{\rho_2}+\mu_2\right)\right]^{\frac{1}{\rho_3}}}$$

ամբողջ ֆունկցիայի արժեքները կոմպլեքս հարթության որոշակի ճառագայթների վրա: Դիցուք բավարարվում են հետևյալ պայմանները.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2\rho_3} \leqslant 2$$

$$\frac{1}{2} < \mu = \mu_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_3}\left(\mu_2 - \frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}\min(1;\ \vartheta;\ \mu_2\rho_2),$$

ϑ, $\mu_2 > 0$, ընդ որում $\rho_2 = \infty$ դեպքում ընդունում ենք $\mu_2 = \frac{1}{2}$, դիցուք նաև

$$k^{(\pm)}(x) = \int\limits_0^x F\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}} t^{\frac{1}{\rho}}\right) t^{\mu-1}\, dt$$

և

$$h^{(\pm)}(x) = \frac{x}{2\pi i} \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{a\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} \frac{H^{(\pm)}(s)}{1-s} x^{-s}\, ds,$$

որտեղ՝

$$H^{(\pm)}(s) = e^{\pm i\frac{\pi}{2}s}\, e^{\left[\mu_1 - \frac{\rho}{\rho_1}(\mu-s)\right]\log\left[\vartheta-\rho(\mu-s)\right]} \left|\Gamma\left(\mu_2 - \frac{\rho}{\rho_2}(\mu-s)\right)\right|^{\frac{1}{\rho_2}}:$$

Տեղի ունի հետևյալ պնդումը. ցանկացած $f(x) \in L_2(0, \infty)$ ֆունկցիայի համար

$$g^{(\pm)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \frac{d}{dy} \int\limits_0^\infty \frac{h^{(\pm)}(xy)}{x} f(x)\, dx$$

բանաձևով համարյա ամենուրեք $(0, +\infty)$-ի վրա որոշվում են $g^{(\pm)}(y) \in L_2(0,\infty)$ ֆունկցիաներ: Համարյա ամենուրեք $(0, +\infty)$-ի վրա տեղի ունի շրջման բանաձև՝

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^\infty \frac{k^{(-)}(xy)}{y} g^{(+)}(y)\, dy +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^\infty \frac{k^{(+)}(xy)}{y} g^{(-)}(y)\, dy:$$

Աշխատանքը կատարելիս օգտվել ենք Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից ([1–3]) աշխատանքներում զարգացված կոմպլեքս տիրույթում Վատսոն-Պլանշերելյան տիպի ինտեգրալ ձևափոխությունների տեսությունից:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, Изв. АН СССР (серия матем)., том 19 (1955), [2] *М. М. Джрбашян*, Изв. АН АрмССР (серия физ.-мат. наук), том XIII, № 3 (1960), [3] *М. М. Джрбашян*, Изв. АН СССР (серия матем.), 24, 387—420 (1960). [4] *Е. Титчмарш*. Введение в теорию интегралов Фурье, ОГИЗ, Гостехиздат, М.-Л, 1946.