ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXXIII 1961 4

МЕХАНИКА

С. А. Амбарцумян, чл.-корресп. АН Армянской ССР, и С. М. Дургарьян

К нестационарной температурной задаче ортотропной пластинки

(Представлено 7/VI 1961)

Однородная ортотропная прямоугольная пластинка толщиной h отнесена к прямоугольной системе координат x, y, z, оси которой совпадают с главными направлениями упругости.

Предполагается, что главные направления упругости параллельны ребрам пластинки.

Уравнение теплопроводности имеет вид [например, ([1])]

$$\lambda_x^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y^2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_z^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \qquad \lambda_i^2 = \frac{k_i}{c\rho}, \tag{A}$$

где λ_i^2 и k_i — диффузионная постоянная и коэффициент теплопроводности вдоль координатной оси i; c — удельная теплоемкость; ρ — плотность; T — температура в произвольной точке пластинки; t — время.

1. *Плоская задача.* Пластинка, первоначально имеющая температуру равную нулю, подверглась постепенному нагреванию путем поддержания постоянной температуры T_0 пограничных плоскостей на торцах $x = \pm a$ и $y = \pm b$.

Для температурной функции имеем

$$\left.\begin{aligned} &\text{начальное условие } T_{t=0} = 0, \\ &\text{граничные условия } T_{x=\pm a} = T_{y=\pm b} = T_0. \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

Проникание тепла внутрь пластинки будет определяться функцией

$$T = T_0 - \frac{16 T_0}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{nmt} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2m-1)\pi y}{2b},$$

где

$$E_{nmt} = \frac{(-1)^{n+m}}{(2n-1)(2m-1)} e^{-\frac{\pi^2}{4a^2b^2}\left[\lambda_x^2 b^2 (2n-1)^2 + \lambda_y^2 a^2 (2m-1)^2\right] t}. \tag{1.2}$$

Температурная функция (1.2) удовлетворяет уравнению теплопроводности (А), начальному и граничным условиям (1.1) и в частном случае $\lambda_x^2=\lambda_y^2=\lambda^2$ совпадает с температурной функцией аналогичной задачи изотропной пластинки ([2]).

Принимая гипотезу Франца Неймана ([3]), обобщенный закон Гука ([4,5]) и, как обычно, введя в рассмотрение функцию напряжения $F(x, y)$, для обобщенного плоского напряженного состояния будем иметь ([1,6])

$$a_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+(2a_{12}+a_{66})\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+a_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}=-\beta_y\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-\beta_x\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \qquad (1.3)$$

где a_{ij} — коэффициенты деформации, а β_i — коэффициент теплового расширения вдоль координатной оси i.

Не останавливаясь на нахождении общего решения F° уравнения (1.3) без правой части (этот вопрос с достаточной полнотой исследован в работе ([6])), приведем частное решение F^* неоднородного уравнения (1.3), удовлетворяющее заданному закону (1.2) изменения температуры.

$$\left.\begin{aligned} &F^*=-\frac{64T_0}{\pi^4}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}H_{nm}\,E_{nmt}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\cos\frac{(2m-1)\pi y}{2b},\\ &\text{где}\\ &H_{nm}=\frac{a^2b^2\,[\beta_y b^2(2n-1)^2+\beta_x a^2(2m-1)^2]}{a_{11}a^4(2m-1)^4+(2a_{12}+a_{66})a^2b^2(2n-1)^2(2m-1)^2+a_{22}b^4(2n-1)^4}.\end{aligned}\right\} \qquad (1.4)$$

Пусть по двум параллельным сторонам пластинки заданы условия

$$\sigma_x=\sigma_y=0 \quad \text{при} \quad y=\pm b. \qquad (1.5)$$

Представив общее решение дифференциального уравнения (1.3) в виде ([6])

$$F^\circ=\sum_{m=1}^{\infty}f_m(x)\cos\frac{(2m-1)\pi y}{2b}, \qquad (1.6)$$

удовлетворим условиям (1.5), а для определения функции $f_m(x)$ получим

$$f_m^{IV}(x)-2p\frac{(2m-1)^2\pi^2}{4b^2}f_m''(x)+q\frac{(2m-1)^4\pi^4}{16\,b^4}f_m(x)=0, \qquad (1.7)$$

где
$$2p=\frac{2a_{12}+a_{66}}{a_{22}},\quad q=\frac{a_{11}}{a_{22}}.$$

Внеся значение функции $f_m(x)$ в (1.6) и пользуясь (1.4), найдем функцию напряжений $F=F^\circ+F^*$, а следовательно—значения напряжений и перемещений.

2. *Изгиб пластинки.* Пренебрегая изменениями коэффициентов упругости и линейного расширения в зависимости от температуры,

для определения перемещений u, v, w точек срединной плоскости пластинки будем иметь ([7])

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\left(\frac{2}{k_0}+\mu_{yx}\right)\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{1}{k}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right]w= \\ &=-\frac{12}{h^3}\left[(\beta_x+\mu_{yx}\beta_y)\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}zdz+\left(\mu_{yx}\beta_x+\frac{1}{k}\beta_y\right)\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}zdz\right]. \end{aligned}\right\} \quad (2.1)$$

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{k_0}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u+\left(\mu_{yx}+\frac{1}{k_0}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{1}{h}(\beta_x+\mu_{yx}\beta_y)\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{\partial T}{\partial x}dz, \\ &\left(\mu_{yx}+\frac{1}{k_0}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left(\frac{1}{k_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{k}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v= \\ &=\frac{1}{h}\left(\mu_{yx}\beta_x+\frac{1}{k}\beta_y\right)\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{\partial T}{\partial y}dz, \end{aligned}\right\} \quad (2.2)$$

где

$$\frac{B_{11}}{B_{22}}=\frac{a_{22}}{a_{11}}=k, \quad \frac{B_{11}}{B_{66}}=\frac{a_{22}a_{66}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}=k_0,$$

$$\frac{B_{12}}{B_{11}}=-\frac{a_{12}}{a_{22}}=\mu_{yx}.$$

Разрешив систему дифференциальных уравнений (2.2) относительно u и v, решение задачи сведем к интегрированию следующих не зависящих друг от друга уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\left(k\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2p_u\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)u=\frac{1}{h}\left[k(\beta_x+\right. \\ &\left.+\mu_{yx}\beta_y)\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}dz+(k_0\beta_x-kk_0\mu_{yx}^2\beta_x-k\mu_{yx}\beta_x-\beta_y)\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{\partial^3 T}{\partial x\partial y^2}dz\right], \end{aligned}\right\} \quad (2.3)$$

$$\left.\begin{aligned} &\left(k\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2p_v\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)v=\frac{1}{h}\left[(k_0\beta_y-kk_0\mu_{yx}^2\beta_y-\right. \\ &\left.-k\mu_{yx}\beta_y-k\beta_x)\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{\partial^3 T}{\partial x^2\partial y}dz+(\beta_y+k\mu_{yx}\beta_x)\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{\partial^3 T}{\partial y^3}dz\right], \end{aligned}\right\} \quad (2.4)$$

$$\left(k\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2p_w\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) w =$$

$$= -\frac{12}{h^3}\left[k(\beta_x + \mu_{yx}\beta_y) \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} z dz + (\beta_y + k\mu_{yx}\beta_x) \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} z dz \right], \tag{2.5}$$

где

$$2p_u = 2p_v = k_0 - kk_0\mu_{yx}^2 - 2k\mu_{yx},$$
$$2p_w = 2k\left(\frac{2}{k_0} + \mu_{yx}\right).$$

Однородные дифференциальные уравнения, соответствующие (2.3)—(2.5), не отличаются от однородного уравнения, соответствующего (1.3), решение которого, как отмечалось в п. 1, приведено в ([6]).

Таким образом, решение задачи температурного изгиба ортотропной пластинки сводится к нахождению частных решений неоднородных уравнений (2.3)—(2.5), что возможно только после конкретизации температурной функции T.

Допустим, что в начальный момент распределение температуры в пластинке представлялось функцией

$$T = T_0 + (\alpha + \delta z)e^{\omega_1 x + \omega_2 y} \quad (\text{при } t = 0), \tag{2.6}$$

а изменение температуры на поверхностях пластинки $z = \pm\frac{h}{2}$ в течение некоторого промежутка времени ($0 \leqslant t \leqslant \tau$) выражается зависимостями

$$T = T_0 + \left(\alpha + \frac{h\delta}{2}\right) E_{xyt} \quad \left(\text{при } z = \frac{h}{2}\right),$$
$$T = T_0 + \left(\alpha - \frac{h\delta}{2}\right) E_{xyt} \quad \left(\text{при } z = -\frac{h}{2}\right), \tag{2.7}$$

где $\quad E_{xyt} = e^{(\lambda_x^2\omega_1^2 + \lambda_y^2\omega_2^2)\,t + \omega_1 x + \omega_2 y}$.

Тогда нетрудно убедиться, что температурная функция

$$T = T_0 + (\alpha + \delta z)E_{xyt} \tag{2.8}$$

удовлетворяет уравнению теплопроводности (A) и начальному и граничным условиям (2.6), (2.7).

Внеся (2.8) в (2.3)—(2.5) и обозначив

$$l_u = \alpha\omega_1\left[k(\beta_x + \mu_{yx}\beta_y)\,\omega_1^2 + (k_0\beta_x - kk_0\mu_{yx}^2\beta_x - k\mu_{yx}\beta_x - \beta_y)\,\omega_2^2\right],$$
$$l_v = \alpha\omega_2\left[(k_0\beta_y - kk_0\mu_{yx}^2\beta_y - k\mu_{yx}\beta_y - k\beta_x)\,\omega_1^2 + (\beta_y + k\mu_{yx}\beta_x)\,\omega_2^2\right],$$
$$l_w = -\delta\left[k(\beta_x + \mu_{yx}\beta_y)\,\omega_1^2 + (\beta_y + k\mu_{yx}\beta_x)\,\omega_2^2\right],$$

получим

$$\left(k \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2p_i \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) i = l_i \mathrm{E}_{xyt} \quad (i = u,\ v,\ w). \tag{2.9}$$

Частные решения (2.9) представятся в виде

$$i^* = L_i \mathrm{E}_{xyt},$$

где

$$L_i = \frac{l_i}{k\omega_1^4 + 2p_i \omega_1^2 \omega_2^2 + \omega_2^4} \quad (i = u,\ v,\ w).$$

3. Вычисления, выполненные на основании результатов двух рассмотренных задач, показывают, что неучет анизотропии материала в уравнениях теплопроводности нестационарных задач термоупругости может привести к значительным погрешностям.

Например, в задаче изгиба ортотропной пластинки, изготовленной из стеклотекстолита КАСТ—В, для которой $\lambda_x^2 \approx 2\lambda_y^2$, неучет анизотропии приводит к 20% погрешности в значениях прогиба.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ ԵՎ Ս. Մ. ԴՈՒՐԳԱՐՅԱՆ

Օրթոտրոպ սալի ոչ ստացիոնար ջերմային խնդրի շուրջը

Ընդունելով, որ սալի նյութը տարբեր ուղղություններով օժտված է առաձգական և ջերմային տարբեր հատկություններով, դիտարկված է ուղղանկյուն սալի ոչ ստացիոնար ջերմային հարթ խնդիրը և ծռումը։

Հարթ խնդրում ենթադրված է, որ զերո ջերմաստիճան ունեցող սալը սկսել է աստիճանաբար տաքանալ եզրերում հաստատուն T_0 ջերմաստիճան պահպանելու հետևանքով։

Որոշված է լարումների ֆունկցիան, երբ $y = \pm b$ եզրերում տեղի ունեն

$$\sigma_x = \sigma_y = 0$$

պայմանները։

Ծռման խնդրում ենթադրված է, որ ջերմաստիճանը ըստ սալի հաստության փոփոխվում է գծային օրենքով, իսկ Ox և Oy առանցքների ուղղությամբ և ժամանակի ընթացքում՝ էքսպոնենցիալ օրենքով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Nowacki Witold*, Lagadnienia termosprężystosci, Warszawa, 1960. [2] *Г. Н. Маслов*, Задача теории упругости о термоупругом равновесии. „Известия научно-исследовательского института гидротехники", 23, 1938. [3] *Л. С. Лейбензон*, Курс теории упругости, ОГИЗ — Гостехиздат, М.—Л., 1947. [4] *С. А. Амбарцумян*, Температурные напряжения в слоистых анизотропных оболочках. „Известия АН Армянской ССР (серия физ.-мат. наук)", V, № 6 (1952). *С. Г. Лехницкий*, Теория упругости анизотропного тела, ГИТТЛ, М.—Л., 1950. [6] *С. Г. Лехницкий*, Анизотропные пластинки, ГИТТЛ, М., 1957. [7] *С. М. Дургарьян*, „Известия АН АрмССР (серия физ.-мат. наук)", XIII, № 2 (1960).