ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXIII 1961 3

МАТЕМАТИКА

А. Б. Нерсесян

Об одной задаче на собственные значения

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 10/X 1961).

Ниже приводятся некоторые биортогональные системы, получаемые по схеме работы [1] и связанные с определенными задачами на собственные значения для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. В случае постоянного запаздывания изучаются биортогональные разложения по указанным системам.

1°. Рассмотрим на отрезке $[0, l]$ $(l < +\infty)$ следующую задачу на собственные значения

$$(A)\begin{cases} y'(x) = \lambda\{y(x) + q(x)\,y(x - \Delta(x))\} \quad (0 \leqslant x \leqslant l < +\infty) & (1)\\ y(0) = 1 & (2)\\ y(l) = \alpha & (3)\end{cases}$$

где $\Delta(x) \geqslant 0, \quad \Delta(l) < l, \quad \Delta'(x) \leqslant \theta < 1 \quad (0 \leqslant x \leqslant l),$

а комплекснозначная функция $q(x) \in L_1(0, l)$ удовлетворяет условию

$$q(x) \equiv 0 \qquad \text{при} \qquad x - \Delta(x) < 0. \tag{4}$$

Обозначив

$$x - \Delta(x) \equiv \varphi(x), \quad \varphi^{-1}(x) \equiv \psi(x)$$

$$q^*(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad \varphi(l) < x < l \\ q(\psi(x))\,\psi'(x) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \varphi(l) \end{cases} \tag{5}$$

получим, что задача (1) + (2) эквивалентна следующему интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода

$$y(x) = 1 + \lambda\int_0^x y(t)\,dt + \lambda\int_0^{\varphi(x)} q^*(t)\,y(t)\,dt. \tag{6}$$

Решение $y(x, \lambda)$ задачи (1) + (2), таким образом, является целой функцией от λ, а собственные значения задачи (A) суть α—точки целой функции

$$\omega(\lambda) = y(l, \lambda). \tag{7}$$

Введем в рассмотрение также задачу

$$
(A^*)\begin{cases} z(x)=\lambda\left[\int\limits_x^l z(t)\,dt+q^*(x)\int\limits_{\psi(x)}^{l} z(t)\,dt\right]+q^*(x)+1 \quad (0\leqslant x\leqslant l) & (8)\\ 1+\lambda\int\limits_0^l z(t)\,dt=\alpha & (9)\end{cases}
$$

Обозначим через $z(x,\lambda)$ решение уравнения (8), являющееся, очевидно, целой функцией по λ. Для произвольных λ и μ имеем

$$
\mu\int\limits_0^l y(x,\lambda)\,z(x,\mu)\,dx=\lambda\mu\int\limits_0^l z(x,\mu)\int\limits_0^x y(t,\lambda)\,dt\,dx+
$$

$$
+\lambda\mu\int\limits_0^l z(x,\mu)\int\limits_0^{\varphi(x)} q^*(t)\,y(t,\lambda)\,dt+\mu\int\limits_0^l z(t,\mu)\,dt=
$$

$$
=\lambda\int\limits_0^l y(t,\lambda)\left[\mu\int\limits_t^l z(x,\mu)\,dx+\mu q^*(t)\int\limits_{\psi(t)}^{l} z(x,\mu)\,dx\right]dt+
$$

$$
+\mu\int\limits_0^l z(t,\mu)\,dt=\lambda\int\limits_0^l y(t,\lambda)\,z(t,\mu)\,dt-
$$

$$
-\lambda\int\limits_0^l y(t,\lambda)\,dt-\lambda\int\limits_0^l q^*(t)\,y(t,\lambda)\,dt+
$$

$$
+\mu\int\limits_0^l z(t,\mu)\,dt=1+\mu\int\limits_0^l z(t,\mu)\,dt-y(l,\lambda)+\lambda\int\limits_0^l y(t,\lambda)\,z(t,\mu)\,dt \qquad (10)
$$

откуда следует, что

$$
\omega(\lambda)=1+\lambda\int\limits_0^l z(t,\lambda)\,dt \qquad (11)
$$

и

$$
\int\limits_0^l y(x,\lambda)\,z(x,\mu)\,dx=\frac{\omega(\lambda)-\omega(\mu)}{\lambda-\mu}\,. \qquad (12)
$$

Из (11) следует, что собственные значения задач (A) и (A^*) совпадают.

Соотношение (12) позволяет построить по схеме работы [1] из функций $y(x,\lambda)$ и $z(x,\lambda)$ биортогональную на отрезке $(0,l)$ систему, — назовем ее системой собственных функций задач (A) и (A^*) и обозначим через

$$\{y_k(x),\ z_k(x)\}_1^{+\infty} \qquad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{13}$$

Отметим следующее основное свойство системы (13):

если замкнутый контур Γ_n охватывает первые n нулей функции $\omega(\lambda) - \alpha$ (нули эти пронумерованы в порядке неубывания модуля и учтена их кратность), то

$$\int_{\Gamma_n} \frac{y(x, \lambda)\, z(t, \lambda)}{\omega(\lambda) - \alpha}\, d\lambda = \sum_{k=1}^{n} y_k(x)\, z_k(t) \quad (0 \leqslant x,\ t \leqslant l). \tag{14}$$

Формула (14) позволяет при исследовании биортогональных разложений по системе (13) пользоваться асимптотическими свойствами функций $y(x, \lambda)$, $z(x, \lambda)$ и $\omega(\lambda)$.

2°. Остановимся на частном случае, когда $\alpha = 0$, $\Delta(x) \equiv \tau$ $(0 < \tau < l = (n+1)\tau,\ \ n \geqslant 1$ — целое).

В этом случае

$$y(x, \lambda) = e^{\lambda x} + \sum_{k=1}^{n} q_k(x) \lambda^k e^{\lambda(x - k\tau)} \tag{15}$$

$$z(x, \lambda) = e^{\lambda(l-x)} + \sum_{k=0}^{n} \{q_k^*(x) + \lambda r_k^*(x)\} \lambda^{k-1} e^{\lambda(l-x-k\tau)}, \tag{16}$$

где

$$q_k(x) = \int_{k\tau}^{x} q(t_1) \int_{(k-1)\tau}^{t_1-\tau} q(t_2) \cdots \int_{\tau}^{t_{k-1}-\tau} q(t_k)\, dt_k \cdots dt_2 dt_1 \tag{17}$$

$$q_k^*(x) = q^*(t) \int_{x+\tau}^{l-(k-1)\tau} q^*(t_1) \int_{t_1+\tau}^{l-(k-2)\tau} q^*(t_2) \cdots$$

$$\cdots \int_{t_{k-2}+\tau}^{l-\tau} q^*(t_{k-1})\, dt_{k-1} \cdots dt_2 dt_1 \tag{18}$$

$$r_k^*(x) = \int_{x}^{l-k\tau} q^*(t_1) \int_{t_1}^{l-(k-1)\tau} q^*(t_2) \cdots \int_{t_{k-1}}^{l-\tau} q^*(t_k)\, dt_k \cdots dt_2 dt_1. \tag{19}$$

Действительно, согласно (4) и (5) при $m\tau \leqslant x < (m+1)\tau$ $(m = 0, 1, \cdots, n)$

$$\begin{aligned} &q_k(x) \equiv 0 \qquad (k = m+1, \cdots, n) \\ &r_k^*(x) \equiv q_k^*(x) \equiv 0 \ \ (k = n-m,\ n-m+1, \cdots, 1) \end{aligned} \tag{20}$$

Учитывая эти соотношения, легко можно проверить, что функции, определяемые формулами (15) и (16), удовлетворяют уравнениям (6) и (8) соответственно.

Из формул (7) и (15) имеем

$$\omega(\lambda) = e^{\lambda l} + \sum_{k=1}^{n} q_k(l)\,\lambda^k e^{\lambda(l-k\tau)}, \tag{21}$$

или

$$\omega(\lambda) = e^{\lambda l} \prod_{k=1}^{n_0} (\lambda e^{-\tau\lambda} - a_k), \tag{22}$$

где $n_0 \geqslant 1$ таково, что

$$q_{n_0}(l) \neq 0, \qquad q_{n_0+k}(l) = 0 \quad (k \geqslant 1)$$

$a_1, a_2, \cdots, a_{n_0}$ — нули многочлена

$$P(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n_0} q_k(l)\, z^k.$$

Следовательно, собственные значения задачи (A) при $\alpha = 0$ и $\Delta(x) \equiv \tau > 0$ суть нули целых функций

$$\omega_k(\lambda) = \lambda e^{-\tau\lambda} - a_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n_0). \tag{23}$$

Поскольку $a_1 a_2 \cdots a_{n_0} = 1$ (т. е. $a_k \neq 0$, $k \geqslant 1$), то, повторяя с незначительными изменениями выкладки работы ([1]), получим:

1) функция $\omega_k(\lambda)$ $(k = 1, 2, \cdots, n_0)$ имеет бесконечное множество нулей, которые при соответствующей нумерации имеют вид:

$$\lambda_p^{(k)} = \frac{2\pi p}{\tau} i \left[1 + 0\left(\frac{\log p}{p}\right)\right] \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{24}$$

причем все достаточно большие по модулю нули простые;

2) если через Γ_x обозначить кривую в λ—плоскости, определяемую уравнением

$$L_x : |\lambda e^{-\tau\lambda}| = x \quad (x > 0), \tag{25}$$

то при $x_1 < \min_k \{|a_k|\}$, $x_2 > \max_k \{|a_k|\}$ вне полосы $D(x_1, x_2)$, ограниченной кривыми L_{x_1} и L_{x_2}

$$|\omega_k(\lambda) - a_k| \geqslant \delta > 0 \quad (k = 1, 2, \cdots n_0); \tag{26}$$

Последнее утверждение можно уточнить (см., например, ([2])):

3) опишем вокруг каждого нуля $\omega_k(\lambda)$ окружность произвольного радиуса $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что вне указанных кружков справедлива оценка (26).

3°.

Лемма 1. *Ядро $y(x, \lambda)$ $(z(x, \lambda))$ замкнуто в $L_1(0, l)$, т. е. если $f(x) \in L_1(0, l)$ и*

$$\int_0^l f(x)\, y(x, \lambda)\, dx = 0 \qquad \left(\int_0^l f(x)\, z(x, \lambda)\, dx = 0\right)$$

то

$$f(x) \overset{\text{п. в.}}{=} 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

Доказательство. Пусть выполняются условия леммы и $f(x) \neq 0$. Тогда из (15) имеем

$$\int_0^{l_1} f(x) e^{\lambda x} dx = \sum_{k=1}^{n} \lambda^k \int_{k\tau}^{l_1} q_k(x) f(x) e^{\lambda(x-k\tau)} dx, \tag{27}$$

где $0 < l_1 \leqslant l$ такая точка, что $f(x) \overset{\text{п. в.}}{=} 0$ при $l_1 < x < l$ и $f(x) \neq 0$ в любой окрестности $(l_1 - \delta, l_1)$ $(\delta > 0)$. Но, как известно, в этом случае в левой части равенства (27) стоит целая функция экспоненциального типа l_1, в то время как справа стоит функция типа не выше $l_1 - \tau$. Из этого противоречия следует утверждение леммы.

Лемма 2. *При* $q_n(l) \neq 0$ *система* $\{y_k(x)\}$ $(\{z_k(x)\})$ *замкнута в классе* $L_1(\tau, l)$, *т. е. если* $f(x) \in L_1(\tau, l)$ $(L_1(0, l-\tau))$ *и*

$$\int_\tau^l f(x) y_k(x) dx = 0 \quad \left(\int_0^{l-\tau} f(x) z_k(x) dx = 0\right) \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{28}$$

то

$$f(x) \overset{\text{п. в.}}{=} 0 \quad (\tau \leqslant x \leqslant l). \quad ((0 \leqslant x \leqslant l - \tau))$$

Доказательство. Пусть выполняются условия (28). Тогда, согласно способу построения системы $\{y_k(x)\}_1^{+\infty}$, функция

$$\Phi(\lambda) = [\omega(\lambda)]^{-1} \int_\tau^l f(x) y(x, \lambda) dx \tag{29}$$

целая. С другой стороны, из результатов п. 2 следует, что вне исключительных кружков произвольно малого радиуса, содержащих нули функции $\omega(\lambda)$

$$|\Phi(\lambda)| \leqslant M < +\infty \tag{30}$$

откуда, учитывая формулы (24), получаем, что на всей λ—плоскости $\Phi(\lambda) \equiv \text{const}$.

Но из формулы (15) и леммы Римана-Лебега следует, что

$$\lim_{x \to -\infty} \Phi(x) = 0,$$

т. е.

$$\Phi(\lambda) \equiv 0.$$

Остается применить лемму 1.

Теорема. *Если* $q_n(l) \neq 0$ *и* $\overset{l-\tau}{\underset{0}{V}}(f) < +\infty$, *то*

$$f(z) \overset{\text{п. п.}}{=} \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} y_k(x) \int_0^{l-\tau} f(t) z_k(t)\, dt \quad (0 \leqslant x \leqslant l-\tau), \tag{31}$$

причем ряд справа сходится равномерно на $[\varepsilon, l]$ *и равномерно ограничен по* m *при* $(0 \leqslant x \leqslant l)$. ($\varepsilon > 0$—любое)

Доказательство. Из леммы 2 следует, что достаточно доказать второе утверждение.

Имеем

$$\int_0^{l-\tau} f(t) z(t, \lambda)\, dt = \tilde{z}(l-\tau, \lambda) f(l-\tau) - \tilde{z}(0, \lambda) f(0+) - \int_0^{l-\tau} \tilde{z}(x, \lambda)\, df(x), \tag{32}$$

где

$$\tilde{z}(x, \lambda) = \int_0^x z(t, \lambda)\, dt \quad (0 \leqslant x \leqslant l). \tag{33}$$

Обозначим через D_n конечную область, ограниченную кривыми L_{x_1} и L_{x_2}, (см. п. 2°) и дугами $l_n^{(+)}$, $l_n^{(-)}$, лежащими соответственно в полуплоскостях $Im\lambda > 0$ и $Im\lambda < 0$, такими, что:

а) их длины ограничены по n, концы лежат соответственно на кривых L_{x_1} и L_{x_2}, а при $n \to +\infty$ эти дуги уходят в бесконечность;

б) при $\lambda \in l_n^{(\pm)}$ $(n = 1, 2, \cdots)$

$$|\omega(\lambda)| \geqslant \delta > 0. \tag{34}$$

Из результатов п. 2° следует, что этим условиям можно легко удовлетворить.

Через γ_n обозначим границу D_n.

Из (14) имеем

$$\int_{\gamma_n} \frac{y(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} \int_0^{l-\tau} z(t, \lambda) f(t)\, dt\, d\lambda = \sum_{\lambda_k \in D_n} y_k(x) \int_0^{l-\tau} f(t) z_k(t)\, dt. \tag{35}$$

Теперь заметим, что, согласно определению кривой $L_x (x > 0)$ (формула (25)) и дуг $l_n^{(\pm)}$ $(n \geqslant 1)$

$$\int_{L_x} \lambda^{k-1} e^{-\lambda\tau k}\, d\lambda < +\infty$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \int_{l_n^{(\pm)}} |\lambda^{k-1} e^{-\lambda\tau k}| \, |d\lambda| = 0. \tag{36}$$

С другой стороны, имеем:

1) при $\lambda \in L_{x_1}$

$$(\lambda e^{-\tau\lambda} - a_k)^{-1} = a_k^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_k^{-n} \lambda^n e^{-\lambda\tau n} \quad (k = 1, 2, \cdots, n_0) \tag{37}$$

2) при $\lambda \in L_{x_2}$

$$(\lambda e^{-\tau\lambda} - a_k)^{-1} = \lambda^{-1} e^{\lambda\tau} \sum_{n=0}^{\infty} a_k^n \lambda^{-n} e^{\lambda\tau n} \quad (k = 1, 2, \cdots, n_0) \tag{38}$$

причем в обоих случаях ряды сходятся равномерно.

Из оценок (26), (36), (37), (38) и формул (15), (16), (32) и (35) получим, что суммы

$$S_n(x) = \sum_{\lambda_k \in D_n} y_k(x) \int_0^{l-\tau} f(t) z_k(t)\, dt \tag{39}$$

равномерно ограничены при $0 \leqslant x \leqslant l$ и равномерно сходятся к определенному пределу при $0 < \varepsilon \leqslant x \leqslant l$ $(n \to +\infty)$. ($S_n(x) \to 0$ при $l - \tau < x \leqslant l$)

Однако нетрудно доказать, исходя из свойств функции $\omega(\lambda)$ (п. 2°), что общий член ряда (35) стремится к нулю, откуда и следует теорема.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Հ. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

Սեփական արժեքների վերաբերյալ մի խնդրի մասին

Դիտարկվում է հետևյալ խնդիրը

$$(A) \begin{cases} y'(x) = +\lambda \{y(x) + q(x)\, y(x - \Delta(x))\} & (0 \leqslant x \leqslant l < +\infty) \\ y(0) = 1 \\ y(l) = \alpha, \end{cases}$$

որտեղ $\Delta(x) \geqslant 0$, $\Delta'(x) \leqslant \theta < 1$, $q(x) \in L_1(0, l)$ *և* $q(x) \equiv 0$, *երբ* $x - \Delta(x) < 0$

Ձևակերպվում է (A)*-ին համալուծ* (A^*) *խնդիրը և կառուցվում է այդ խնդիրներից ծնված*

$$\{y_k(x),\ z_k(x)\}_1^{+\infty} \tag{1}$$

սեփական ֆունկցիաների բիօրթոգոնալ սիստեմը։

Ապացուցվում է, որ ամեն մի $(0, l-\tau)$*-ի վրա սահմանափակ վարիացիա ունեցող ֆունկցիա վերածվում է բիօրթոգոնալ շարքի ըստ (1) սիստեմի, երբ* $\Delta(x) \equiv \tau$*։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян* и *А. Б. Нерсесян*, Изв. АН АрмССР, т. XII, № 5 (1959).
[2] *S. Verblunsky*, On a class of integral functions. Quart. J. Math. (Oxford), (2), 8 (1957), 312—320.