

Л. А. Мовсисян

Об одной динамической задаче цилиндрической оболочки

(Представлено чл.-корресп. АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 4/V 1961)

Рассматривается круговая замкнутая цилиндрическая оболочка под динамическим воздействием поверхностного давления и продольного усилия.

Как известно (1-3), упругие системы при динамическом нагружении продольными силами не теряют устойчивости, когда сила равна Эйлеровой критической. Кроме того, при малых деформациях, линейная теория упругости дает вполне удовлетворительные значения для расчетных величин, как при критической силе, так и при некотором промежутке за критической.

В настоящей работе мы пользуемся аппаратом линейной теории оболочек.

Влияние продольного усилия учитывается в соответствии с линейаризованной теорией изгиба и устойчивости оболочек (4,5).

1. Если пренебречь продольным инерционным членом в уравнении движения элемента оболочки, уравнение осесимметричного движения цилиндрической оболочки будет:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1 - \nu^2}{a^2} w - \frac{r^2}{D} T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{r^2 (1 - \nu^2)}{E a^2} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{r^4}{D} q(x, t), \quad (1)$$

где

w — прогиб оболочки,

$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}$ — изгибная жесткость,

E — модуль Юнга,

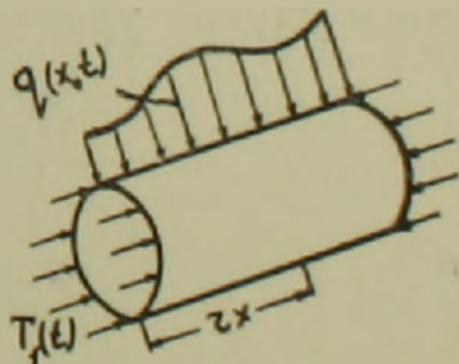
ν — коэффициент Пуассона,

h — толщина оболочки,

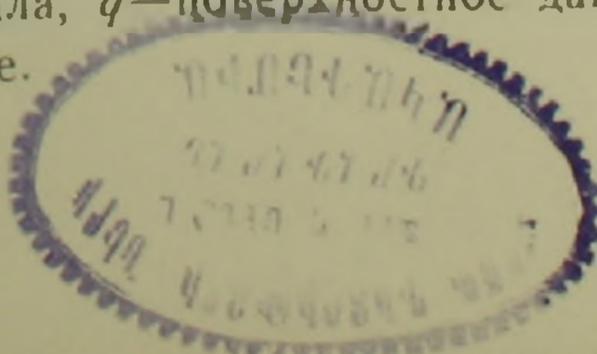
r — радиус круга,

$$a^2 = \frac{h^2}{12 r^2},$$

ρ — плотность материала, q — поверхностное давление и T_1 — продольное усилие в оболочке.



Фиг. 1.



Вообще, T_1 —функция от x и t , но когда скорость нагружения продольными усилиями меньше скорости звука в данном материале, можно принять T_1 как функцию одного t и пренебречь продольным смещением, которое выше приняли без оговорок.

Рассмотрим случай, когда края оболочки шарнирно оперты. Берем решение (1) в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi r}{l} \quad (2)$$

где l —длина оболочки.

Для неизвестных $f_n(t)$ получим следующие уравнения

$$\frac{d^2 f_n}{dt^2} + \omega_n^2 \left(1 + \frac{T_1(t)}{T_{n,кр}} \right) f_n = q_n(t), \quad (3)$$

где $\omega_n^2 = \frac{E}{\rho r^2} \left[\lambda_n^4 \frac{a^2}{1 - \nu^2} + 1 \right]$ — n -я собственная частота оболочки,

$T_{n,кр} = \frac{Eh \left[\lambda_n^4 \frac{a^2}{1 - \nu^2} + 1 \right]}{\lambda_n^2}$ — n -я критическая сила по Эйлеру,

$$q_n(t) = \frac{2r}{hl\rho} \int_0^{\frac{l}{r}} q(x, t) \sin \lambda_n x dx.$$

2. Рассмотрим случай, когда $T_1(t)$ линейная функция. В частности, если один из концов оболочки неподвижен, а другой конец движется с заданной скоростью v в направлении первого, то выражение для $T_1(t)$ будет

$$T_1 = - \frac{Eh}{l(1 - \nu^2)} vt. \quad (4)$$

По условию $v < c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

В этом случае уравнение (3) будет

$$\frac{d^2 f_n}{dt^2} + \omega_n^2 (1 - \mu_n t) f_n = q_n(t), \quad (5)$$

где $\mu_n = \frac{v}{l(1 - \nu^2)} \cdot \frac{\lambda_n^2}{\left[\lambda_n^4 \frac{a^2}{1 - \nu^2} + 1 \right]}$.

При малой скорости нагружения (статическая задача), как от продольного усилия, так и от поверхностного давления, влиянием

инерционного члена в (5) можно пренебречь, и для $f_n(t)$ получим

$$f_{n,ст}(t) = \frac{q_n(t)}{\omega_n^2 (1 - \mu_n t)}. \quad (6)$$

Как видно из (2) из (6), в момент $t = t_{кр} = \frac{1}{\mu_n}$ оболочка теряет устойчивость в смысле Эйлера. Принимая $t = \mu_n t_1$, уравнение (5) приводим к виду

$$\frac{d^2 f_n}{dt_1^2} + \Omega_n^2 (1 - t_1) f_n = \frac{1}{\mu_n^2} q_n(t_1), \quad (7)$$

где

$$\Omega_n = \frac{\omega_n}{\mu_n}.$$

Рассмотрим отдельно два случая: $1 - t_1 \geq 0$, т. е. докритическое (по Эйлеру) движение и $1 - t_1 \leq 0$, т. е. послекритическое движение.

Нас в основном интересует докритическое движение и, в частности, выражение прогиба в момент $T_1 = T_{1,кр}$.

В первом случае, принимая $1 - t_1 = \tau$, для $f_n(\tau)$ получим:

$$\frac{d^2 f_n}{d\tau^2} + \Omega_n^2 \tau f_n = \frac{1}{\mu_n^2} q_n(\tau). \quad (8)$$

Решение однородной части уравнения (8) будет:

$$f_{n,0}(\tau) = C_{n,1} f_{n,1}(\tau) + C_{n,2} f_{n,2}(\tau) = C_{n,1} V \tau J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \Omega_n \tau^{\frac{3}{2}} \right) + \\ + C_{n,2} V \tau J_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \Omega_n \tau^{\frac{3}{2}} \right), \quad (9)$$

где $J_{\pm \frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \Omega_n \tau^{\frac{3}{2}} \right)$ — функции Бесселя первого рода. Частное решение (8) находим методом вариации произвольных постоянных.

$$f_{n,r}(\tau) = \frac{1}{W \mu_n^2} \left[f_{n,2} \int_0^\tau q_n(\tau) f_{n,1}(\tau) d\tau - f_{n,1} \int_0^\tau q_n(\tau) f_{n,2}(\tau) d\tau \right], \quad (10)$$

где W — детерминант Вронского.

$$W = - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} = - \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}. \quad (11)$$

В частности, если поверхностное давление линейная функция от времени, т. е. $q_n(\tau) = q_{n,0} + q_{n,1} \cdot \tau$, то частное решение будет

$$\begin{aligned}
f_{n,r}(\tau) = & \frac{1}{W\mu^2\Omega_n} \left\{ V\tau J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\Omega_n\tau^{\frac{3}{2}}\right) \left[2q_{n,0} \sum_{k=0}^{\infty} J_{\frac{4}{3}+2k}\left(\frac{2}{3}\Omega_n\tau^{\frac{3}{2}}\right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - q_{n,1} \cdot \tau J_{-\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\Omega_n\tau^{\frac{3}{2}}\right) \right] - V\tau J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\Omega_n\tau^{\frac{3}{2}}\right) \times \right. \\
& \left. \times \left[2q_{n,0} \sum_{k=0}^{\infty} J_{\frac{2}{3}+2k}\left(\frac{2}{3}\Omega_n\tau^{\frac{3}{2}}\right) + q_{n,1} \cdot \tau J_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\Omega_n\tau^{\frac{3}{2}}\right) \right] \right\}. \quad (12)
\end{aligned}$$

Постоянные интегрирования $C_{n,1}$ и $C_{n,2}$ находятся из начальных условий. Если $\tau = 1$ ($t = 0$), $f_n(1) = f_n^{(0)}$ и $f_n'(1) = f_n'^{(0)}$, то

$$C_{n,1} = \frac{1}{W} \left[f_n^{(0)} \cdot f_{n,2}(1) - f_n'^{(0)} \cdot f_{n,2}(1) + \frac{1}{\mu_n^2} \int_0^1 q_n(\tau) f_{n,2}(\tau) d\tau \right] \quad (13)$$

$$C_{n,2} = \frac{1}{W} \left[f_n'^{(0)} \cdot f_{n,1}(1) - f_n^{(0)} f_{n,1}'(1) - \frac{1}{\mu_n^2} \int_0^1 q_n(\tau) f_{n,1}(\tau) d\tau \right]$$

Представляет интерес значение $f_n(\tau)$ в момент $\tau = 0$ (что соответствует $t = t_{кр}$)

$$f_n(0) = \frac{\sqrt[3]{3}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\sqrt[3]{\Omega_n}} \cdot C_{n,2}. \quad (14)$$

Как видно из (2), (9), (12), (13) и (14), в момент $t = t_{кр}$ прогиб оболочки конечная величина и зависит от скорости нагружения.

В динамическом случае загрузки сила инерции стабилизирует оболочку, и в момент $t = t_{кр}$ оболочка не теряет устойчивость, т. е. получается своего рода прохождение через критическую силу.

Во втором случае, принимая $t_1 - 1 = \theta$, для $f_n(\theta)$ получим

$$\frac{d^2 f_n}{d\theta^2} - \Omega_n^2 \theta f_n = \frac{1}{\mu_n^2} q_n(\theta). \quad (15)$$

Решение однородной части (15) будет:

$$f_{n,0}(\theta) = C_{n,1} V\theta I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\Omega_n\theta^{\frac{3}{2}}\right) + C_{n,2} V\theta I_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}\Omega_n\theta^{\frac{3}{2}}\right), \quad (16)$$

где $I_{\pm\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\Omega_n\theta^{\frac{3}{2}}\right)$ — модифицированные функции Бесселя.

Частное решение (15) имеет вид (10), нужно только заменить $J_m(z)$ на $I_m(z)$, причем определитель Вронского остается прежним (11).

Произвольные постоянные $C'_{n,1}$ и $C'_{n,2}$ находятся из условия равенства решений и первых производных (8) и (15).

Легко получить,

$$\begin{aligned} C_{n,1} &= -C'_{n,1} \\ C_{n,2} &= C'_{n,2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Данная постановка задачи не позволяет найти промежуток, в котором решение (15) дает ответ поставленной задачи. Укажем только, что дальнейшее увеличение нагрузки приводит к разрушению оболочки, а разгрузка — к колебаниям, которые вообще затухают.

3. Рассмотрим конкретный пример. На оболочке, которая была подвержена давлению по закону $q(x, t) = q_1 \sin \frac{\pi r}{l} x$, с момента $t=0$ действует продольное усилие (4). Прогиб в средней точке оболочки в момент $t = t_{кр}$ будет

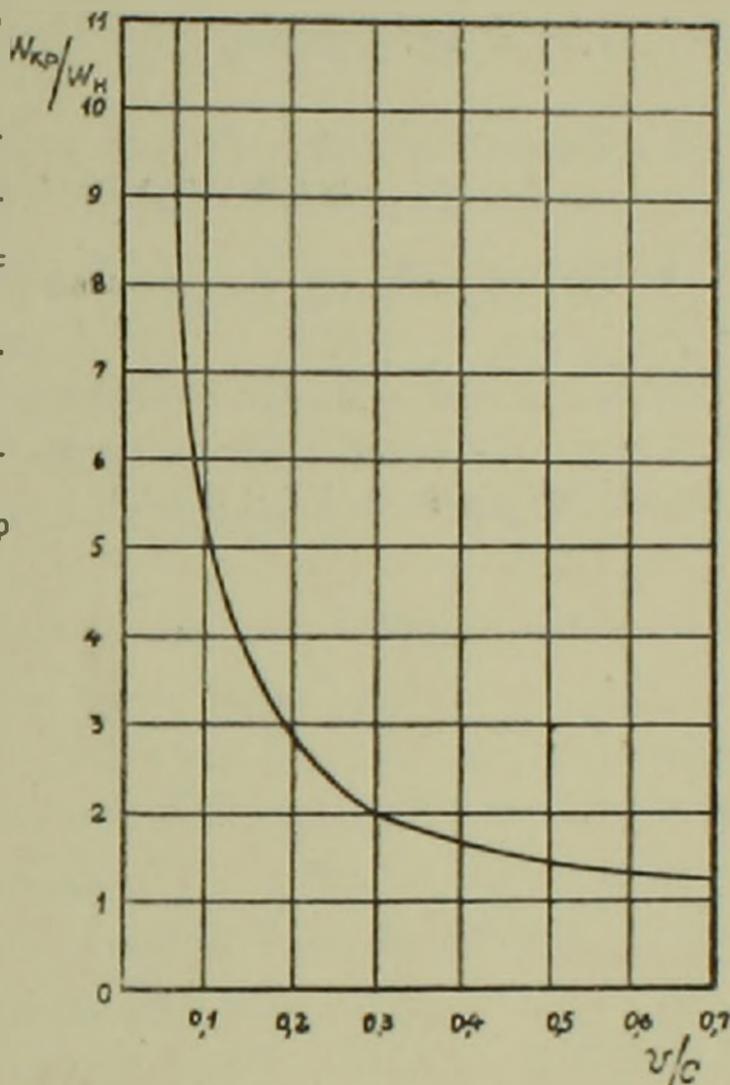
$$\begin{aligned} w_{кр} &= - \frac{\sqrt[3]{3}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \sqrt[3]{\Omega_1}} \frac{1}{W} \times \\ &\times \left[w_{н} \Omega_1 J_{-\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3} \Omega_1\right) + \frac{q_1}{\rho h \nu_1^2} \times \right. \\ &\times \left. \int_0^1 V^{-\tau} J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} \Omega_1 \tau^{\frac{3}{2}}\right) d\tau \right], \quad (18) \end{aligned}$$

где

$$w_{н} = \frac{r^4 q_1}{D \left[\lambda_1^4 + \frac{1-\nu^2}{a^2} \right]} \text{ — начальный прогиб.}$$

На фиг. 2 по оси абсцисс расположено отношение скорости нагружения продольных усилий к скорости звука, а по оси ординат — отношение $w_{кр}/w_{н}$. Взяты следующие отношения для расчетов оболочки: $r/h = 100$, $l/r = 2$.

Из графика видно, как и следовало ожидать, что при увеличении скорости нагружения отношение пригиба в момент $t = t_{кр}$ к $w_{н}$ уменьшается, причем скорость уменьшения достаточно большая.



Фиг. 2.

Պլանային քաղաքի մի դինամիկ խնդրի մասին

Իրոտարկվում է գլանային թաղանթի տոանցքասիմետրիկ շարժումը դինամիկ ընդ-
երկայնական և ճնշման տակ, թաղանթների տեսության դժային դրվածքով: Ընդերկայնա-
կան ուժերը հաշվի են առնվում համաձայն (4.5):

Ստացված է թաղանթի ճկվածքի արտահայտությունն ինչպես մինչկրիտիկ (էլեմ-
յան), այնպես էլ կրիտիկ ուժից հետո շարժումների համար:

Ստացվում է, որ ի հակադրություն ստատիկ բեռնավորման, թաղանթը կայունու-
թյունը չի կորցնում դինամիկ բեռնավորման դեպքում, երբ ընդերկայնական ուժը հա-
վասար է կրիտիկական ուժին:

Թվային կոնկրետ օրինակում ցույց է տրված թաղանթի միջին (երկարության)
կետի ճկվածքի կախվածությունը բեռնավորման արագությունից:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Н. Хофф, Продольный изгиб и устойчивость, 1955. ² А. С. Вольмир, ДАН СССР, т. 123, № 5, 1958. ³ В. Л. Агамиров, А. С. Вольмир, Известия АН СССР (ОТН, Механика и Машиностроение), № 3, 1959. ⁴ L. H. Donnel, NASA. Rep., № 479, 1933. ⁵ В. З. Власов, Общая теория оболочек, 1949. ⁶ Г. Н. Ватсон, Теория бес-
селевых функций, ч. 1 и 11, 1949.