

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Саркисян

О формуле центра изгиба анизотропного призматического стержня с симметричным сечением

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 11/IV 1961)

Задача об определении центра изгиба изотропного тела при помощи двух функций комплексного переменного исследована Р. Капильдео (1). Та же задача при помощи функций Сен-Венана и Прандтля решена В. В. Новожиловым (2).

В настоящей работе рассматривается задача об определении центра изгиба анизотропного (неортоотропного) призматического стержня с симметричным поперечным сечением. Доказано, что для решения этой задачи достаточно знать только функцию напряжения (функция Прандтля) при кручении анизотропного стержня.

В качестве приложения полученной формулы решена задача об определении положения центра изгиба анизотропного призматического стержня с сечением в виде удлиненного авиационного профиля В. П. Ветчинкина (3).

1. Рассмотрим призматический стержень с симметричным поперечным сечением, ограниченный кривыми

$$y = f(x), \tag{1.1}$$

$$y = -f(x).$$

Здесь $f(x)$ имеет необходимое количество непрерывных производных для рассматриваемых значений x .

Поместим начало координат в центре тяжести незакрепленного конца стержня. Примем геометрическую ось стержня за ось z , а оси x и y совместим с главными осями инерции сечения. Примем далее, что силы, действующие на свободном конце, статически эквивалентны одной равнодействующей P , направленной по оси y .

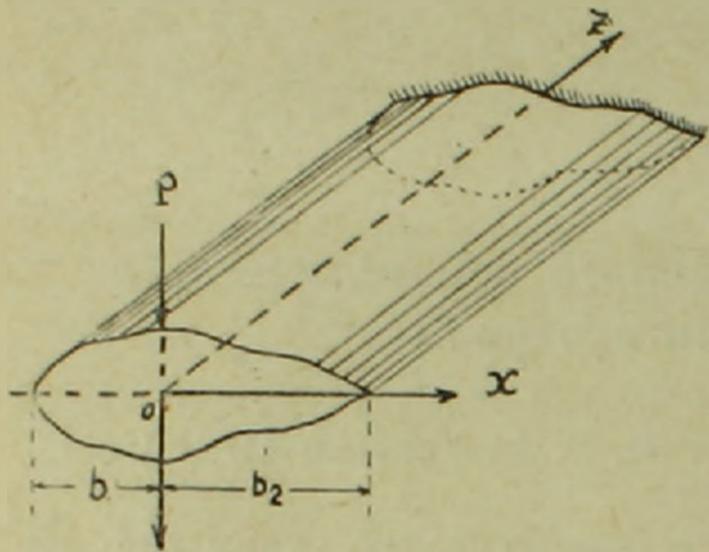
Тогда напряженное состояние в сечении стержня будет

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} &= 0, \\ \tau_z &= -\frac{P}{I} \cdot zy, \end{aligned}$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{P}{2I} \cdot [y^2 - f^2(x)]. \quad (1.2)$$

Здесь $\Psi(x, y)$ — функция напряжений при изгибе, I — момент инерции относительно главной оси x .

Как известно (4), задача об изгибе призматического стержня, имеющего только одну плоскость упругой симметрии, нормальную к



Фиг. 1.

оси (т. е. неортотропную), сводится к решению дифференциального уравнения с частными производными с неразделяющимися переменными

$$L(\Psi) = F(x, y, a_{ij}) \quad (1.3)$$

с граничным условием на контуре s

$$\Psi|_s = \frac{P}{2I} \cdot \int_0^s (y^2 - f^2) dx = 0, \quad (1.4)$$

где

$$L = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+k} \cdot a_{i+3, k+3} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}, \quad a_{45} = a_{54}, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y,$$

$$F(x, y, a_{ij}) = -\frac{P}{I} \left[2a_{13}x + (a_{36} + a_{45})y + \frac{a_{44}D_x f^2}{2} \right] - 2\theta, \quad (1.5)$$

a_{ij} — упругие постоянные, θ — постоянная, характеризующая угол закручивания на единицу длины.

Закручивания не будет, если точка приложения силы совпадет с центром изгиба. В этом случае, полагая $\theta = 0$, координата \bar{x} центра изгиба определяется так

$$\bar{x} = \frac{1}{P} \cdot \iint_2 (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{yz} \cdot x) dx dy,$$

или, имея в виду (1.2), интегрируя по частям, находим

$$\bar{x} = -\frac{2}{P} \cdot \iint_2 \Psi d\Omega - \frac{1}{2I} \cdot \iint_2 [y^2 - f^2(x)] x dx dy. \quad (1.6)$$

Если предполагать, что неортотропный стержень деформируется скручивающими моментами, тогда функция напряжения Φ (функция Прандтля) удовлетворяет следующему уравнению (5)

$$L(\Phi) = -2 \quad (1.7)$$

и условию на контуре поперечного сечения

$$\Phi|_s = 0. \quad (1.8)$$

Поставим задачу: определить положение центра изгиба, имея

только функцию напряжений при кручении Φ , не решая задачи об изгибе, т. е. не решая уравнения (1.3).

Для этого достаточно показать, что входящий в (1.6) интеграл $\iint_{\Omega} \Psi d\Omega$ можно выразить через интеграл от функции Φ . С этой целью составим следующее скалярное произведение

$$(\Phi, L(\Psi)) = \iint_{\Omega} \Phi L(\Psi) d\Omega. \quad (1.9)$$

Для выражения (1.9) применим вторую формулу Грина

$$\begin{aligned} (\Phi, L(\Psi)) = & - \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+k} a_{i+3, k+3} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} d\Omega + \\ & + \int_s \Phi \cdot \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+k} a_{i+3, k+3} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \cdot \cos(\nu, \hat{x}_i) ds. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь (ν, \hat{x}_i) — угол между осью Ox_i и внешней нормалью данного замкнутого контура.

Контурный интеграл, стоящий в выражении (1.10), есть нуль по условию (1.8). Следовательно, (1.10) примет вид

$$(\Phi, L(\Psi)) = - \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+k} a_{i+3, k+3} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} d\Omega. \quad (1.11)$$

С другой стороны, учитывая (1.3), скалярное произведение можно представить так

$$\iint_{\Omega} \Phi \cdot F(x, y, a_{ij}) d\Omega = - \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+k} a_{i+3, k+3} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} d\Omega. \quad (1.12)$$

Теперь составим такое выражение

$$(\Psi, L(\Phi)) = \iint_{\Omega} \Psi L(\Phi) d\Omega,$$

которое, принимая формулы Грина и учитывая (1.4), легко видеть, примет вид

$$(\Psi, L(\Phi)) = - \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+k} a_{i+3, k+3} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} d\Omega. \quad (1.13)$$

Принимая во внимание (1.7), из (1.13) находим

$$2 \iint_{\Omega} \Psi d\Omega = \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+k} a_{i+3, k+3} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} d\Omega. \quad (1.14)$$

Учитывая $a_{45} = a_{54}$, при помощи выражений (1.12) и (1.14) устанавливаем

$$-2 \iint_{\Omega} \Psi d\Omega = \iint_{\Omega} \Phi \cdot F d\Omega. \quad (1.15)$$

Далее, пользуясь (1.15) и (1.5), для определения положения центра изгиба из (1.6) находим следующую формулу:

$$\bar{x} = -\frac{1}{2I} \left\{ \iint_{\Omega} \Phi \cdot [4a_{13}x + 2(a_{36} + a_{45})y + a_{44}D_x f^2] dx dy + \right. \\ \left. + \iint_{\Omega} [y^2 - f^2(x)] x dx dy \right\}$$

или, интегрируя последнее выражение по y и подставляя значение

$$I = \frac{2}{3} \int_{-b_1}^{b_2} f^3(x) dx, \text{ окончательно получим}$$

$$\bar{x} = -\frac{1}{2I} \cdot \iint_{\Omega} \Phi \cdot [4a_{13}x + 2(a_{36} + a_{45})y + a_{44}D_x f^2] dx dy + \\ + \frac{\int_{-b_1}^{b_2} x f^3(x) dx}{\int_{-b_1}^{b_2} f^3(x) dx}. \quad (1.16)$$

В частном случае, для определения положения центра изгиба ортотропного стержня, у которого плоскости упругой симметрии перпендикулярны к главным осям инерции поперечных сечений ($a_{36} = a_{45} = 0$, $a_{44} = \frac{1}{G_{23}}$, $a_{13} = -\frac{\nu_{31}}{E_3}$), из (1.16) получим

$$\bar{x} = -\frac{1}{2I} \cdot \iint_{\Omega} \Phi \cdot \left[\frac{D_x f^2}{G_{23}} - \frac{4\nu_{31}x}{E_3} \right] dx dy + \frac{\int_{-b_1}^{b_2} x f^3(x) dx}{\int_{-b_1}^{b_2} f^3(x) dx}. \quad (1.17)$$

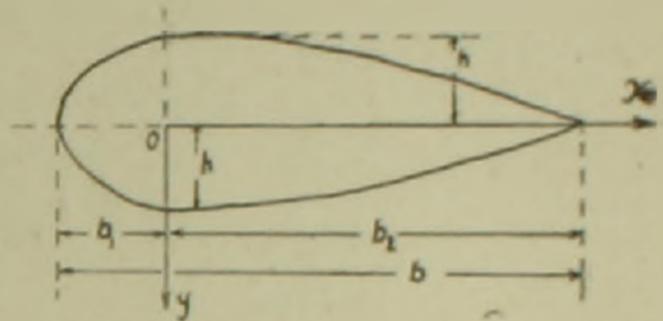
А для определения центра изгиба изотропного стержня с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν ($\nu_{31} = \nu_{32} = \nu$, $E_3 = E$, $G_{23} = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$), находим

$$\bar{x} = \frac{1}{EI} \int \int \Phi \cdot [2vx - (1 + \nu) \cdot D_x f^2] dx dy + \frac{\int_{-b_1}^{b_2} x f^2(x) dx}{\int_{-b_1}^{b_2} f^2(x) dx} \quad (1.18)$$

2. *Определение центра изгиба анизотропного стержня с сечением в виде удлиненного авиационного профиля.* Пусть сечением стержня является профиль Ветчинкина, т. е. сечение авиационного профиля ограничено дугами полукубических парабол (фиг. 2)

$$y = \pm \frac{a}{b} \sqrt{\frac{x + b_1}{b} \cdot (b_2 - x)}, \quad (2.1)$$

$$a = \frac{3\sqrt{3} \cdot h}{2}$$



Фиг. 2.

где

Величины b_1 и b_2 определяются из условий, что начало координат совпадает с центром тяжести

$$b_1 = b \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}, \quad b_2 = b \cdot \left[1 - \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} \right]$$

или, пользуясь известной формулой гамма-функции $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, находим

$$b_1 = \frac{3}{7} \cdot b, \quad b_2 = \frac{4}{7} \cdot b.$$

Предположим, что точка приложения силы совпадает с центром изгиба. Так как рассматривается удлиненный профиль, то $\lambda = \frac{h}{b}$ естественно будет малым параметром.

Тогда уравнение (2.1) можно написать в более удобном виде

$$y^2 - \lambda^2 \varphi^2(x) = 0, \quad (2.2)$$

$$\varphi(x) = c(x + b_1)^{\frac{1}{2}} \cdot (b_2 - x), \quad c = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{b}} \quad (2.2)$$

где

Решая дифференциальное уравнение (1.7) при условии (1.8) методом малого параметра, для функции Φ получим (6)

$$\Phi(x, y) = \frac{\lambda^2 \varphi^2 - y^2}{a_{55}} + \lambda^2 \cdot \frac{a_{44}}{a_{55}^2} \cdot \left\{ (\lambda^2 \varphi^2 - y^2) \times \right.$$

$$\times \left[\frac{D^2 \varphi^2}{2} + \frac{y \cdot a_{45} D^3 \varphi^2}{3a_{55}} \right] + \dots \quad (2.3)$$

Подставляя выражение для функции напряжения из (2.3) в (1.16), интегрируя сначала по y , а потом в полученных интегралах вводя новую переменную так $x = bz - b_1$, получим эйлеровый интеграл первого порядка (бета-функция), затем, применяя формулы приведения $B(\alpha, \beta)$ и выполняя ряд громоздких преобразований, находим

$$\begin{aligned} \bar{x} = & \frac{b}{B\left(\frac{5}{2}, 4\right)} \left\{ \left(1 - \frac{4a_{13}}{a_{55}} \right) \cdot \left[B\left(\frac{7}{2}, 4\right) - \frac{B\left(\frac{5}{2}, 2\right) \cdot B\left(\frac{5}{2}, 4\right)}{B\left(\frac{3}{2}, 2\right)} \right] - \right. \\ & - \lambda^2 \cdot \frac{12a_{13}a_{44}}{11a_{55}^2} \cdot \left[\frac{B\left(\frac{3}{2}, 4\right) \cdot B\left(\frac{5}{2}, 2\right)}{B\left(\frac{3}{2}, 2\right)} - B\left(\frac{5}{2}, 4\right) \right] + \\ & \left. + \lambda^4 \cdot \frac{4a_{44}}{3315a_{55}^3} \cdot B\left(\frac{3}{2}, 5\right) \cdot [45a_{44}a_{55} + 7a_{45}(a_{36} + a_{45})] \right\} + \dots \end{aligned}$$

Принимая во внимание значения бета-функции, окончательно для определения центра изгиба рассматриваемого неортотропного стержня с сечением в виде удлиненного авиационного профиля получается такая формула

$$\begin{aligned} \bar{x} = & -\frac{4b}{91} \cdot \left(1 - \frac{4a_{13}}{a_{55}} \right) - \lambda^2 \cdot \frac{48a_{13}a_{44}}{77a_{55}^2} + \\ & + \lambda^4 \cdot \frac{32a_{44}}{585a_{55}^3} \cdot [45a_{44}a_{55} + 7a_{45}(a_{36} + a_{45})] + \dots, \quad (2.4) \end{aligned}$$

что совпадает с результатом, полученным в работе (7) иным способом.

Грифс и Тейлор (8) при помощи приближенного метода определили положение центра изгиба для изотропного призматического стержня с удлиненным профилем. По их формуле, дающей преуменьшенное значение координаты центра изгиба (т. е. ее нижнюю оценку), для авиационного профиля получается

$$\bar{x}_{\text{гр.}} = -\frac{4b}{91}. \quad (2.5)$$

Л. С. Лейбензон (9) приближенным методом получил следующее выражение для положения центра изгиба рассматриваемого профиля (ортотропного)

$$\bar{x}_L = -\frac{4b}{91} \cdot \left(1 + \frac{4G_{13}\nu_{13}}{E_3} \right), \quad (2.6)$$

которое является преувеличенным по сравнению с точным.

Таким образом, учитывая (2.5), (2.6) и (2.4), находим

$$\bar{x} = \bar{x}_a - \lambda^2 \cdot \frac{48a_{13}a_{41}}{77a_{55}^2} + \lambda^4 \cdot \frac{32a_{41}}{585a_{55}^3} \cdot [45a_{41}a_{55} + 7a_{45}(a_{36} + a_{45})] + \dots \quad (2.7)$$

или

$$\bar{x} = \left(1 + \frac{4G_{13}v_{13}}{E_3} \right) \cdot \bar{x}_{\text{гр}} - \lambda^2 \cdot \frac{48a_{13}a_{41}}{77a_{55}^2} + \lambda^4 \cdot \frac{32a_{41}}{585a_{55}^3} \cdot [45a_{41}a_{55} + 7a_{45}(a_{36} + a_{45})] + \dots \quad (2.8)$$

Итак, из полученной формулы (2.7) или (2.8) видно, что первое слагаемое совпадает с выражением центра изгиба для ортотропного авиационного профиля, а в остальных слагаемых, особенно в последнем, выявляется влияние неортотропности.

Ереванский государственный университет

Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Սիմետրիկ կտրվածքով անիզոտրոպ պրիզմայանև ձողի ծուման կենտրոնի բանաձևի մասին

Իզոտրոպ մարմնի ծուման կենտրոնի որոշման խնդիրը, առանց լուծելու ծուման խնդիրը, կոմպլեքս փոփոխականի երկու ֆունկցիաներով ուսումնասիրել է Ո. Կապիլ-դեոն⁽¹⁾:

Այնուհետև նույն խնդիրը Սեն-Վենանի և Պրանդտլի ֆունկցիաների ոգնությամբ լուծել է Վ. Վ. Նովոժիլովը⁽²⁾:

Ներկա աշխատանքում ստացված է նոր բանաձև սիմետրիկ ընդլայնական կտրվածքով անիզոտրոպ (ոչ օրթոտրոպ) պրիզմայանև ձողերի ծուման կենտրոնի որոշման համար՝ Ցույց է տրված, որ այդ խնդրի լուծման համար բավական է ունենալ անիզոտրոպ ձողերի ոլորման լարումների ֆունկցիան (Պրանդտլի ֆունկցիան):

Որպես կերասուբյուլն ստացված բանաձևի՝ լուծված է երկարացված ավիացիոն պրոֆիլով (Վ. Պ. Վեսչինկինի⁽³⁾ ավիացիոն պրոֆիլը) անիզոտրոպ պրիզմայանև ձողի ծուման կենտրոնի խնդիրը: Այդ արդյունքը համեմատված է այլ եղանակներով լուծված նույն խնդրի արդյունքների հետ⁽⁷⁻⁹⁾:

ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ P. Capildeo, „Flexure with shear centres, a general treatment with complex variable“ Proc. Cambridge Philos. Soc. 1953, 49, № 2, 308—318. ² В. В. Новожилов, Теория упругости, Судпромгиз, Л., 1958. ³ В. П. Ветчинкин, Теория гребных винтов. М., 1926 (литогр.) стр. 453. ⁴ С. Г. Лехницкий, Теория упругости анизотропного тела. Госиздат технико-теоретической литературы. М.—Л., 1950. ⁵ W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig—Berlin (Teubner), 1928. ⁶ В. С. Саркисян, „Известия АН АрмССР“ (серия физ.-мат. наук), том XII, № 2 (1959). ⁷ В. С. Саркисян, „Известия АН АрмССР“ (в печати). ⁸ А. А. Грифс и Б. Б. Тейлор. R. В М., 399, 1917, appendix. ⁹ Л. С. Лейбензон, Собрание трудов, том I, изд. АН СССР, М., 1951.