

А. А. Баблоян

Об одной задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра конечной длины из трансверсально-изотропного материала

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 6/IV 1961)

Осесимметричной деформацией анизотропных тел занимались С. Г. Лехницкий⁽¹⁻³⁾, Эллиотт⁽⁴⁾, Чакраворти⁽⁵⁾ и другие. В этих работах в основном рассматривались частные случаи нагружения. В работах же, где рассматривались случаи более общего нагружения, некоторые из граничных условий удовлетворяются в интегральной форме.

В настоящей работе дано точное решение задачи осесимметричной деформации круглого цилиндра радиусом R и высотой h из трансверсально-изотропного материала, когда на торцах цилиндра заданы нормальные и касательные напряжения, а на боковой поверхности касательное напряжение и радиальное перемещение.

Рассматриваемая задача может быть использована для получения решения некоторых задач об изгибе толстых круглых плит^(3,6).

При решении задачи мы пользуемся формулами Эллиотта—Чакраворти, однако считаем нужным отметить, что указанные формулы путем простых преобразований могут быть получены из ранее опубликованных работ С. Г. Лехницкого^(1,2).

За ось z цилиндрической системы координат примем ось изотропии цилиндра. Начало координат поместим на одном торце цилиндра. При осесимметричной деформации формулы для напряжений и перемещений, выраженные через две „гармонические“ функции $\varphi_1(r, z)$ и $\varphi_2(r, z)$, имеют вид^(4,5):

$$u = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial r},$$

$$w = k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z},$$

$$\sigma_r = - \frac{c_{11} - c_{12}}{r} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) - c_{44} \left[(1 + k_1) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + (1 + k_2) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} \right],$$

$$\sigma_0 = \frac{c_{11} - c_{12}}{r} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) +$$

$$+ \left[(k_1 c_{13} - \nu_1^2 c_{12}) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + (k_2 c_{13} - \nu_2^2 c_{12}) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} \right], \quad (1)$$

$$\sigma_z = (k_1 c_{33} - \nu_1^2 c_{13}) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + (k_2 c_{33} - \nu_2^2 c_{13}) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2},$$

$$\tau_{rz} = c_{44} \left[(1 - k_1) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial z} + (1 + k_2) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial z} \right],$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{r\theta} = 0.$$

Здесь ν_1^2 и ν_2^2 — корни характеристического уравнения

$$c_{11} c_{44} \nu^4 + [c_{13} (c_{13} + 2c_{44}) - c_{11} c_{33}] \nu^2 + c_{33} c_{44} = 0, \quad (2)$$

а значения k_1 и k_2 , соответствующие значениям ν_1^2 и ν_2^2 , определяются из условия

$$\frac{c_{44} + k (c_{13} + c_{44})}{c_{11}} = \frac{k c_{33}}{(c_{13} + c_{44}) + k c_{44}} = \nu^2. \quad (3)$$

Функции $\varphi_1(r, z)$ и $\varphi_2(r, z)$ удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_1^2 \varphi_1 + \nu_1^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0, \quad \nabla_2^2 \varphi_2 + \nu_2^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = 0, \quad (4)$$

где

$$\nabla_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Легко показать, что корни уравнения (2) не могут быть чисто мнимыми. В зависимости от свойства материала они и значение k , определенные из условия (3), могут быть либо действительными, либо сопряженными комплексными числами. Тогда из (1) и (4) следует, что выражения для напряжений и перемещений всегда принимают действительные значения.

Для определенности во всех случаях мы предположим, что действительные части ν_1 и ν_2 положительны, т. е.

$$\operatorname{Re} \nu_1 > 0, \quad \operatorname{Re} \nu_2 > 0.$$

Для изотропного тела, когда

$$c_{11} = c_{33} = \lambda_1 + 2\mu_1, \quad c_{12} = c_{13} = \lambda_1, \quad c_{44} = \mu_1, \quad (5)$$

где λ_1 и μ_1 коэффициенты Ламе, из (2) и (3) получим

$$\nu_1 = \nu_2 = k_1 = k_2 = 1. \quad (5')$$

В остальных случаях корни уравнения (2) не равны между собою. Следовательно, различны и корни уравнения (3).

Решая уравнения (4) методом разделения переменных, для функции $\varphi_i(r, z)$ ($i = 1, 2$) получим следующую фундаментальную систему:

$$\varphi_i(r, z) = \begin{cases} [AI_0(\nu_i \lambda r) + BK_0(\nu_i \lambda r)] [C \sin \lambda z + D \cos \lambda z] \\ \left[A_1 \operatorname{sh} \frac{\mu z}{\nu_i} + B_1 \operatorname{ch} \frac{\mu z}{\nu_i} \right] [C_1 J_0(\mu r) + D_1 Y_0(\mu r)] \end{cases}, \quad (6)$$

где λ и μ — произвольные действительные параметры.

Отметим, что функции

$$z, \ln r, z \ln r, \frac{r^2}{2} - \frac{z^2}{\nu_i^2} \quad (6')$$

также являются решениями уравнений (4). Здесь I_i , K_i — функции Бесселя i -го порядка от мнимого аргумента, соответственно первого и второго рода, а J_i и Y_i — функции Бесселя первого и второго рода с действительным аргументом.

В силу (6) и (6') функции φ_i ищем в виде (6)

$$\begin{aligned} \varphi_i(r, z) = & a_i z + b_i \left(\frac{r^2}{2} - \frac{z^2}{\nu_i^2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(i)} I_0(\nu_i \lambda_k r) \cos \lambda_k z + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k^{(i)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_i} + C_k^{(i)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_i} \right) J_0(\mu_k r), \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (7)$$

где μ_k — корни уравнения $J_1(\mu_k R) = 0$, а $\lambda_k = \frac{k\pi}{h}$.

Подставляя значения $\varphi_i(r, z)$ из (7) в (1) и используя условие (3), для напряжений и перемещений получим следующие выражения

$$\begin{aligned} u(r, z) = & r(b_1 + b_2) + \sum_{k=1}^{\infty} [\nu_1 A_k^{(1)} I_1(\nu_1 \lambda_k r) + \nu_2 A_k^{(2)} I_1(\nu_2 \lambda_k r)] \lambda_k \cos \lambda_k z - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k^{(1)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + C_k^{(1)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + B_k^{(2)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_2} + C_k^{(2)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_2} \right) \mu_k J_1(\mu_k r), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} w(r, z) = & a_1 k_1 + a_2 k_2 - 2z \left(\frac{b_1 k_1}{\nu_1^2} + \frac{b_2 k_2}{\nu_2^2} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(1)} k_1 I_0(\nu_1 \lambda_k r) + \\ & + A_k^{(2)} k_2 I_0(\nu_2 \lambda_k r)] \lambda_k \cos \lambda_k z + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k_1}{\nu_1} B_k^{(1)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + \frac{k_1}{\nu_1} C_k^{(1)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + \right. \\ & \left. + \frac{k_2}{\nu_2} B_k^{(2)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_2} + \frac{k_2}{\nu_2} C_k^{(2)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_2} \right) \mu_k J_0(\mu_k r), \end{aligned} \quad (9)$$

$$v_z(r, z) = -c_{44} \sum_{k=1}^{\infty} [\nu_1 (1 + k_1) A_k^{(1)} I_1(\nu_1 \lambda_k r) + \nu_2 (1 + k_2) A_k^{(2)} I_1(\nu_2 \lambda_k r)] \lambda_k^2 \sin \lambda_k z -$$

$$-c_{44} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+k_1}{\nu_1} B_k^{(1)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + \frac{1+k_1}{\nu_1} C_k^{(1)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + \frac{1+k_2}{\nu_2} B_k^{(2)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_2} + \right. \\ \left. + \frac{1+k_2}{\nu_2} C_k^{(2)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_2} \right) \mu_k^2 J_1(\mu_k r), \quad (10)$$

$$\sigma_z(r, z) = -2c_{44}[(1+k_1)b_1 + (1+k_2)b_2] - c_{44} \sum_{k=1}^{\infty} [\nu_1^2 (1+k_1) A_k^{(1)} I_0(\nu_1 \lambda_k r) + \\ + \nu_2^2 (1+k_2) A_k^{(2)} I_0(\nu_2 \lambda_k r)] \lambda_k^2 \cos \lambda_k z + c_{44} \sum_{k=1}^{\infty} \left[(1+k_1) B_k^{(1)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + \right. \\ \left. + (1+k_1) C_k^{(1)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + (1+k_2) B_k^{(2)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_2} + \right. \\ \left. + (1+k_2) C_k^{(2)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_2} \right] \mu_k^2 J_0(\mu_k r), \quad (11)$$

$$\sigma_r(r, z) = -(c_{11} - c_{12})(b_1 + b_2) + 2c_{44} \left(\frac{1+k_1}{\nu_1^2} b_1 + \frac{1+k_2}{\nu_2^2} b_2 \right) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_k^{(1)} \left[c_{44} (1+k_1) I_0(\nu_1 \lambda_k r) - \nu_1 (c_{11} - c_{12}) \frac{I_1(\nu_1 \lambda_k r)}{\lambda_k r} \right] + \right. \\ \left. + A_k^{(2)} \left[c_{44} (1+k_2) I_0(\nu_2 \lambda_k r) - \nu_2 (c_{11} - c_{12}) \frac{I_1(\nu_2 \lambda_k r)}{\lambda_k r} \right] \right\} \lambda_k^2 \cos \lambda_k z + \\ + \frac{c_{11} - c_{12}}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k^{(1)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + C_k^{(1)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + B_k^{(2)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_2} + C_k^{(2)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_2} \right) \mu_k J_1(\mu_k r) - \\ - c_{44} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+k_1}{\nu_1^2} B_k^{(1)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + \frac{1+k_1}{\nu_1^2} C_k^{(1)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + \frac{1+k_2}{\nu_2^2} B_k^{(2)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_2} + \right. \\ \left. + \frac{1+k_2}{\nu_2^2} C_k^{(2)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_2} \right) \mu_k^2 J_0(\mu_k r). \quad (12)$$

Рассмотрим напряженное состояние круглого цилиндра при следующих граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z(r, h) = f_1(r) &= d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k J_0(\mu_k r) \\ \sigma_z(r, 0) = f_2(r) &= d'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d'_k J_0(\mu_k r) \\ \tau_{rz}(r, h) = f_3(r) &= \sum_{k=1}^{\infty} e_k J_1(\mu_k r) \\ \tau_{rz}(r, 0) = f_4(r) &= \sum_{k=1}^{\infty} e'_k J_1(\mu_k r) \end{aligned} \right\} (0 \leq r \leq R) \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rz}(R, z) = f_5(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} g_k \sin \lambda_k z \\ u(R, z) = f_6(z) &= f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos \lambda_k z \end{aligned} \right\} (0 \leq z \leq h) \quad (13)$$

Здесь мы допускаем, что функция f_6 непрерывна, а f_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) кусочно-непрерывны и имеют ограниченное изменение в соответствующих интервалах. В силу симметричного распределения внешней нагрузки относительно оси z имеем также

$$\tau_{rz}(0, z) = u(0, z) = 0. \quad (14)$$

Условиями (13) и (14) полностью определяются все напряжения и перемещение u . Перемещение же w определяется с точностью до постоянной $a_1 k_1 + a_2 k_2$. Для определения последней предполагаем, что перемещения w на окружности $r = R, z = 0$ боковой поверхности цилиндра равны нулю

$$w(R, 0) = 0. \quad (15)$$

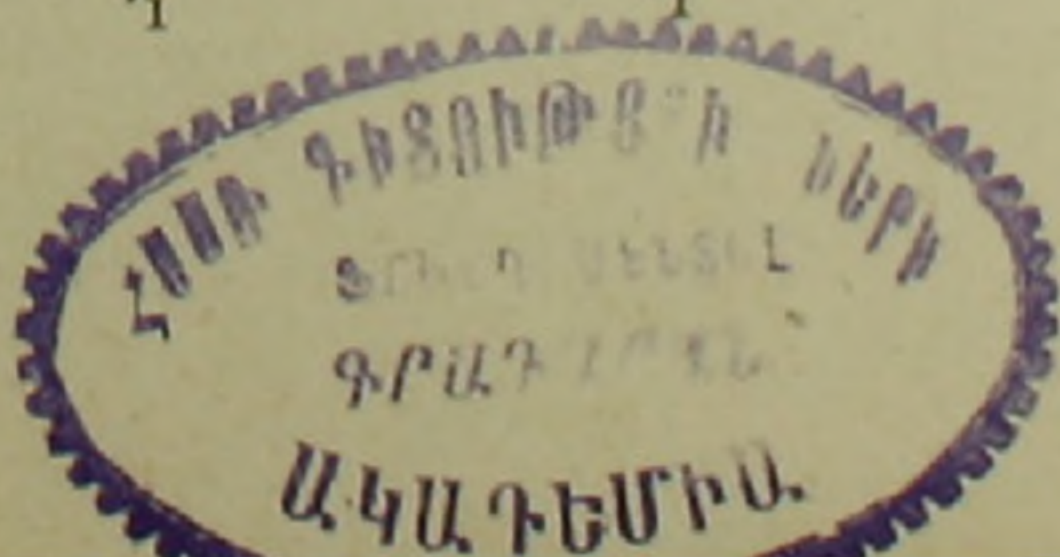
Легко видеть, что условия (14) удовлетворяются тождественно.

Удовлетворив же условиям (13) и (15), для определения постоянных интегрирования, входящих в выражение (7), получаем ряд соотношений. При получении этих соотношений пользуемся разложениями Фурье-Дини (?) функций $I_0(\nu_i \lambda_k r)$ и $\frac{1}{r} I_1(\nu_i \lambda_k r)$ по функциям $\{J_0(\mu_k r)\}$, где μ_k — корни уравнения $J_1(xR) = 0$.

Принимая во внимание, что для трансверсально изотропного материала $\nu_1 \neq \nu_2$ и $k_1 \neq k_2$, из указанных обоих соотношений для постоянных интегрирования получаем их значения.

Подставляя найденные значения коэффициентов в (7), для функций $\varphi_i(r, z)$ окончательно получаем

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, z) = & a_1 z + b_1 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{z^2}{\nu_1^2} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + k_2) c_{44} \lambda_k f_k + g_k I_0(\nu_1 \lambda_k r)}{(k_1 - k_2) c_{44} \nu_1 \lambda_k^2 I_1(\nu_1 \lambda_k R)} \cos \lambda_k z - \\ & - \frac{1}{(1 + k_1) c_{44}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k r)}{\mu_k^2 \Delta_k} \left\{ e'_k \left[\nu_1 \operatorname{ch} \frac{\mu_k h}{\nu_2} \operatorname{sh} \frac{\mu_k (h - z)}{\nu_1} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \nu_2 \operatorname{sh} \frac{\mu_k h}{\nu_2} \operatorname{ch} \frac{\mu_k (h - z)}{\nu_1} + \nu_1 \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_1} \right] + \right. \\ & + \alpha'_k \left[\operatorname{ch} \frac{\mu_k h}{\nu_2} \operatorname{ch} \frac{\mu_k (h - z)}{\nu_1} - \frac{\nu_1}{\nu_2} \operatorname{sh} \frac{\mu_k h}{\nu_2} \operatorname{sh} \frac{\mu_k (h - z)}{\nu_1} - \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_1} \right] - \\ & \left. - \alpha_k \left[\frac{\nu_1}{\nu_2} \operatorname{sh} \frac{\mu_k h}{\nu_2} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + \operatorname{ch} \frac{\mu_k (h - z)}{\nu_1} - \operatorname{ch} \frac{\mu_k h}{\nu_2} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_1} \right] - \right. \end{aligned}$$



$$- e_k \left[\nu_1 \operatorname{ch} \frac{\mu_k h}{\nu_2} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + \nu_1 \operatorname{sh} \frac{\mu_k (h - z)}{\nu_1} - \right. \\ \left. - \nu_2 \operatorname{sh} \frac{\mu_k h}{\nu_2} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_1} \right] \Bigg\}, \quad (16)$$

где

$$(k_2 - k_1) b_2 = \frac{1}{R c_{44}} \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \frac{g_k}{\lambda_k} - \frac{d_0 + d'_0}{4 c_{44}} - (1 + k_1) \frac{f_0}{R}, \\ (k_1 - k_2) b_1 = \frac{1}{R c_{44}} \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \frac{g_k}{\lambda_k} - \frac{d_0 + d'_0}{4 c_{44}} - (1 + k_2) \frac{f_0}{R}, \\ \alpha_k = d_k + \frac{2}{(k_1 - k_2) R J_0(\mu_k R)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \lambda_p N_{kp}}{[\nu_1^2 \lambda_p^2 + \mu_k^2] [\nu_2^2 \lambda_p^2 + \mu_k^2]}, \\ \alpha'_k = d'_k + \frac{2}{(k_1 - k_2) R J_0(\mu_k R)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\lambda_p N_{kp}}{[\nu_1^2 \lambda_p^2 + \mu_k^2] [\nu_2^2 \lambda_p^2 + \mu_k^2]}, \quad (17) \\ N_{kp} = (\nu_2^2 - \nu_1^2) c_{44} (1 + k_1) (1 + k_2) \mu_k^2 \lambda_p f_p + g_p \{ (k_2 - k_1) \nu_1^2 \nu_2^2 \lambda_p^2 + \\ + [\nu_2^2 (1 + k_2) - \nu_1^2 (1 + k_1)] \mu_k^2 \}, \\ \Delta_k = 2 - 2 \operatorname{ch} \frac{\mu_k h}{\nu_1} \cdot \operatorname{ch} \frac{\mu_k h}{\nu_2} + \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{\nu_1 \nu_2} \operatorname{sh} \frac{\mu_k h}{\nu_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{\mu_k h}{\nu_2}.$$

Для получения $\varphi_2(r, z)$ достаточно в формуле (16) индексы 1 и 2 при коэффициентах a , b , k , ν заменить соответственно на 2 и 1.

При удовлетворении граничных условий получается также следующее соотношение:

$$d'_0 - d_0 = \frac{4}{R} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{g_k}{\lambda_k},$$

которое является уравнением равновесия сил, действующих вдоль оси цилиндра.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ն. ԲՍԲԼՈՅԱՆ

Տրանսվերսալ-իզոտրոպ նյութից կլոր գլանի առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ դեֆորմացիայի մի խնդրի մասին

Հոդվածում արվում է տրանսվերսալ-իզոտրոպ նյութից կլոր գլանի առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ դեֆորմացիայի մի խնդրի ճշգրիտ լուծումը, երբ նյութի իզոտրոպիայի հարթութիւնները ուղղահայաց են գլանի առանցքին, իսկ եզրային պայմանները արված են հետևյալ ձևով. գլանի հիմքերի վրա հայտնի են լարումները, իսկ կողմնային մակերևույթի վրա՝ շոշափող լարումները և սաղիալ տեղափոխումները:

Դիտված խնդիրը կարող է ոգտագործվել կլոր հաստ սալերի ծուխն մի քանի խնդիրների լուծումներն ստանալու համար: Խնդրի լուծումը ներկայացվում է շարքերով՝ բոլոր Բեսսելի և Էռանկյունաչափական ֆունկցիաների, որոնց գործակիցները որոշվում են եզրային պայմաններով:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Դ Ր Ո Շ Ո Ւ Մ Ն Ե Ր

- ¹ С. Г. Лехницкий, Симметричная деформация и кручение тела вращения с анизотропией частного вида ПММ, т. 4, вып. 3 (1940). - С. Г. Лехницкий, Теория упругости анизотропного тела, ГИТТЛ, М.—Л., 1950. ² С. Г. Лехницкий, Изгиб трансверсально-изотропной толстой плиты. „Всесоюзное совещание по применению методов теории функций комплексного переменного к задачам математической физики“. Тезисы докладов, Тбилиси, 1961, 41—43. ³ Г. А. Эллиотт, Three-dimensional stress distributions in hexagonal aeolotropic crystals. „Proc. Camb. Phil. Soc.“, 44, 1948, 522—533. ⁴ Ж. Г. Чакраворти, On the distribution of stress in an infinite circular cylinder..., Bull. Cal. Math. Soc., vol. 48, No. 4, 1956, 163—169. ⁵ Б. Л. Абрамян и А. А. Баблоян, „Известия АН АрмССР“, (серия ф.-м. наук), том XI, № 4, 95—106 (1958). ⁶ Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций. Часть I. Госиздат, М., 1949.