ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXII 1961 4

МАТЕМАТИКА

С. Н. Мергелян, академик АН Армянской ССР, и А. А. Талалян

Об одном классе точечно-разрывных функций

(Представлено 9/III 1961)

В работе М. В. Келдыша (1) рассматривается проблема Бэра для окружности: *какие функции могут быть представлены на окружности* $|z| = 1$ *в виде предела сходящейся и равномерно ограниченной на* $|z| = 1$ *последовательности полиномов.*

В этой работе установлено, что для разрешимости проблемы Бэра достаточно выполнение условий:

1°. *Функция* $f(t)$ *ограничена и точечно-разрывна на любом совершенном подмножестве окружности.*

2°. *Для любого целого* $n \geqslant 0$

$$\int\limits_{|t|=1} f(t)t^n\,dt = 0$$

3°. *Мера множества точек разрыва* $f(t)$ *равна нулю.*

Первые два условия являются, очевидно, и необходимыми условиями разрешимости.

Третье условие в теореме М. В. Келдыша связано с методом исследования и, вообще говоря, не представляет необходимое условие.

Имеется предположение, что необходимое и достаточное условие разрешимости проблемы Бэра состоит в выполнении условий 1° и 2°, однако это до сих пор не доказано.

В настоящей заметке мы устанавливаем предложение, которое позволяет несколько усилить теорему М. В. Келдыша, но вопрос о полном решении проблемы Бэра для круга по-прежнему остается открытым.

Теорема. *Если* $f(t)$ *определена и ограничена на окружности* $|t| = 1$, *точечно-разрывна на любом совершенном подмножестве окружности и эквивалентна нулю, то существует последовательность полиномов* $P_n(t)$, *обладающая свойствами:*

1°. $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(t) = f(t), \quad |t| = 1$

2°. $|P_n(t)| < C, \quad n \geqslant 1, \quad |t| = 1.$

Доказательство. Достаточно рассмотреть лишь действительные функции $f(t)$ с отмеченными свойствами.

Допустим сначала, что множество $E^{(0)}$ точек, в которых $f(t)=0$, имеет тип F_σ. В силу того, что $f(t)$ принадлежит первому классу, множество

$$E^{(1)} = E(f(t)>0) + E(f(t)<0)$$

имеет тип F_σ, следовательно, окружность $\Gamma: |t| = 1$ можно представить в виде

$$\Gamma = \sum_{k=1}^{\infty} A_k + \sum_{k=1}^{\infty} B_k,$$

где A_k, B_k — замкнутые множества, причем

$$A_k \in E^{(1)}, \quad B_k \in E^{(0)}.$$

Множества

$$E_n = \sum_{k=1}^{n} A_k \quad \text{и} \quad F_n = \sum_{k=1}^{n} B_k, \quad n \geqslant 1$$

замкнуты и не имеют общих точек, поэтому число r_n, равное расстоянию между ними, положительно.

Если $\varphi_n(t)$ означает последовательность непрерывных на Γ функций, сходящихся к $f(t)$, то можно считать, что

$$\max_{|t|=1} |\varphi_n(t)| = \sup_{|t|=1} |f(t)| = M_f.$$

Из рассуждений, изложенных в [1] следует, что любому $n \geqslant 1$ отвечает полином $Q_n(z)$, удовлетворяющий условиям

$$|\varphi_n(t) - Q_n(t)| < \varepsilon_n, \quad t \in E_n$$

$$|Q_n(t)| < \varepsilon_n \text{ вне } \varepsilon_n\text{— окрестности множества } E_n$$

$$|Q_n(t)| \leqslant M_f + \varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n < r_n$, $\varepsilon_n < M_f$ и $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$.

Это доказывает теорему в случае, когда $E^{(0)}$— множество типа F_σ.

Рассматривая общий случай, число M выберем так, чтобы

$$-M < f(t) < M$$

и разобьем сегмент $[-M, M]$ на 2^n равных частей точками

$$c_0^{(n)} = -M < c_1^{(n)} < \cdots < c_{2^{n-1}}^{(n)} = 0 < \cdots < c_{2^n}^{(n)} = M.$$

Пусть

$$A_k^{(n)} = E(c_{k-1}^{(n)} < f(t) < c_{k+1}^{(n)}), \quad 1 \leqslant k \leqslant 2^n - 1,$$

$$A_0^{(n)} = E(f(t) < c_1^{(n)}), \quad A_{2^n}^{(n)} = E(f(t) > c_{2^n-1}^{(n)}).$$

Поскольку $f(t)$ принадлежит первому классу, все множества $A_k^{(n)}$ являются множествами типа F_σ, причем

$$\operatorname{mes} A^{(n)}_{2^{n-1}} = 2\pi$$

$$\operatorname{mes} A_k^{(n)} = 0, \quad k \neq 2^{n-1}. \tag{1}$$

Окружность Γ представляется в виде суммы множеств типа F_σ

$$\Gamma = \sum_{k=0}^{2^n} A_k^{(n)}.$$

Известно, что в этом случае Γ может быть представлена в виде конечной суммы множеств типа F_σ попарно без общих точек. Действительно, если замкнутые множества $F_{k,i}^{(n)}$, сумма которых равна $A_k^{(n)}$, расположить в последовательность

$$F_1, F_2, \cdots, F_m, \cdots,$$

то $\Gamma = \sum_{k=1}^{\infty} F_k$ и каждое из F_m будет принадлежать одному из множеств $A_k^{(n)}$, $0 \leqslant k \leqslant 2^n$.

Пусть

$$E_1 = F_1, \quad E_m = F_m - F_m (F_1 + F_2 + \cdots + F_{m-1}).$$

Множества E_m попарно не имеют общих точек и являются разностью замкнутых множеств, следовательно E_m — множества типа F_σ. Сумма E_m по всем m, для которых $F_m \subset A_k^{(n)}$, представляет множество $B_k^{(n)}$ типа F_σ, причем

$$\Gamma = \sum_{k=0}^{2^n} B_k^{(n)}, \quad B_k^{(n)} \subset A_k^{(n)}, \quad B_i^{(n)} B_j^{(n)} = 0, \quad i \neq j.$$

Из (1) следует, что

$$\operatorname{mes} B^{(n)}_{2^{n-1}} = 2\pi$$

$$\operatorname{mes} B_k^{(n)} = 0, \quad k \neq 2^{n-1}.$$

Функцию $f_n(t)$ определим следующим образом:

$$f_n(t) = c_k^{(n)}, \quad t \subset B_k^{(n)}, \quad 0 \leqslant k \leqslant 2^n.$$

Всюду на окружности Γ будем иметь

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{2M}{2^{n-1}}.$$

Положим

$$\varphi_1(t)=f_1(t), \quad \varphi_n(t)=f_n(t)-f_{n-1}(t), \quad n>1.$$

Множество $E(\varphi_n(t)=0)$ является конечной суммой множеств типа F, и поэтому имеет тип F_σ, следовательно, согласно доказанному выше частному случаю теоремы, существует последовательность полиномов $P_{n,k}(t)$, для которых

$$\lim_{k\to\infty} P_{n,k}(t)=\varphi_n(t), \quad |t|=1,$$

$$|P_{n,k}(t)|\leqslant 2M_{\varphi_n}, \quad |t|=1.$$

Но

$$\sup_{|t|=1}|\varphi_n(t)|<\frac{12M}{2^n},$$

поэтому

$$\max_{|t|=1}|P_{n,k}(t)|\leqslant\frac{24M_f}{2^n}, \quad k\geqslant 1.$$

Пусть

$$P_n(z)=P_{1,n}(z)+P_{2,n}(z)+\cdots+P_{n,n}(z).$$

Если m выбрано так, что

$$\frac{24M}{2^m}<\frac{\varepsilon}{4},$$

то при любом $n>m$

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} P_{k,n}(t)\right|<\frac{\varepsilon}{4}, \quad |t|=1,$$

и

$$|f(t)-P_n(t)|\leqslant\sum_{k=1}^{m}|\varphi_k(t)-P_{k,n}(t)|+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

если $n>n(t,\varepsilon)$.

Кроме того, всюду на Г

$$|P_n(t)|\leqslant 24M_f$$

откуда и следует справедливость утверждения.

Сравнивая его с теоремой М. В. Келдыша, приходим к следующему заключению.

Следствие. Если 1°. $f(t)$ —ограниченная функция на Г, точечно разрывная на любом совершенном подмножестве окружности,

$$2^\circ.\ \int_{|t|=1} f(t)\,t^k\,dt=0, \quad k\geqslant 0,$$

3°. Значения $f(t)$ можно изменить на множестве меры нуль так, чтобы полученная функция была ограниченной функцией первого класса, почти всюду непрерывной на окружности, то для $f(t)$ проблема Бэра разрешима.

Ереванский университет

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ ԵՎ Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

Կետային-խզվող ֆունկցիաների մի դասի մասին

Ներկա հոդվածում ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը, եթե $f(t)$ ֆունկցիան որոշված է ու սահմանափակ է Γ շրջանագծի վրա, կետային-խզվող է Γ-ի յուրաքանչյուր կատարյալ ենթաբազմության վրա և համարյա ամենուրեք հավասար է զերոյի, ապա $f(t)$ ֆունկցիան հնարավոր է ներկայացնել որպես հավասարաչափ սահմանափակ բազմանդամների հաջորդականության սահման։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. В. Келдыш*, О последовательностях полиномов, ограниченных в совокупности, Математич. сборник, т. 42, 1935, стр. 719—724.