ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXII 1961 4

МАТЕМАТИКА

А. В. Чакмазян

К теории кривизны двумерных поверхностей четырехмерного пространства

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 7/II 1961)

Пусть

$$r = r(u^1, u^2)$$

параметрическое уравнение произвольной двумерной поверхности X_2, вложенной в евклидово E_4. Если X, Y единичные и взаимно-перпендикулярные нормальные векторы поверхности, то ее основные деривационные уравнения имеют вид

$$\nabla_j r_i = h_{ij} X + K_{ij} Y, \tag{1}$$

где

$$h_{ij} = -\partial_i r \partial_j X = X \nabla_j r_i, \quad k_{ij} = -\partial_i r \partial_j Y = Y \nabla_j r_i; \quad \text{а } \nabla$$

символ ковариантного дифференцирования во внутренней связности X_2. Рассмотрим тензор

$$P_{ijke} = (\nabla_j r_i)(\nabla_k r_e) = h_{ij} h_{ke} + K_{ij} K_{ke}{}^{*}$$

и соответствующую дифференциальную форму

$$P_{ijke} du^i du^j du^k du^e = (h_{ij} du^i du^j)^2 + (K_{ij} du^i du^j)^2. \tag{A}$$

Пусть на X_2 задана кривая Γ уравнением

$$u^i = u^i(s).$$

Единичный касательный вектор кривой в точке M будет

$$t = r^1 = r_i v^i, \quad \text{где} \quad v^i = \frac{du^i}{ds}.$$

Дифференцируя по натуральному параметру s и пользуясь уравнением (1), получаем

$$r'' = h_{ij} v^i v^j X + k_{ij} v^i v^j Y + \frac{\delta(v^i)}{ds} r_i.$$

* Этот тензор рассматривал Коммерель в работе Riemannsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen. Mat. Ann. vol. 60 ст 548—596.

Проекцию вектора кривизны r'' на нормальную плоскость мы назовем *вектором нормальной кривизны* кривой Г и обозначим через $\bar{\varkappa}$. По определению имеем

$$\bar{\varkappa} = h_{ij} v^i v^j X + k_{ij} v^i v^j Y. \tag{2}$$

Длину вектора $\bar{\varkappa}$ мы будем называть нормальной кривизной и обозначим через $\varkappa$, тогда

$$\varkappa = \sqrt{(h_{ij} v^i v^j)^2 + (k_{ij} v^i v^j)^2}.$$

Имея в виду (A), получаем

$$\varkappa = \sqrt{\frac{P_{ijke} du^i du^j du^k du^e}{(g_{ij} du^i du^j)^2}}. \tag{3}$$

С другой стороны, по формулам Френе

$$\boldsymbol{r}'' = k\boldsymbol{n},$$

где k—кривизна кривой Г в точке M, а $\boldsymbol{n}$—единичный вектор главной нормали.

Умножив обе части этого равенства скалярно на $\bar{\varkappa}$, получаем

$$k\cos\theta = \sqrt{(h_{ij} v^i v^j)^2 + (k_{ij} v^i v^j)^2} \quad \text{или}$$

$$k\cos\theta = \sqrt{\frac{P_{ijke} du^i du^j du^k du^e}{(g_{ij} du^i du^j)^2}}, \tag{4}$$

где θ—угол между векторами $\boldsymbol{n}$ и $\bar{\varkappa}$.

Если точка M на поверхности X_2 задана, коэффициенты P_{ijke}, g_{ij} имеют вполне определенные значения. В этом случае правая часть (4) зависит только от отношения дифференциалов $du^1{:}du^2$.

Назовем нормальным сечением поверхности в точке M кривую пересечения поверхности с нормальной гиперплоскостью, т. е. с гиперплоскостью, проведенной через нормальную плоскость в точке M. Нормальное сечение вполне определяется заданием своего касательного вектора $\boldsymbol{t}$.

Полученное нормальное сечение Γ_0 имеет с кривой Г общую касательную в точке M поверхности. Если обозначим кривизну Γ_0 через k_0, то из (4) получим

$$k_0 = \sqrt{\frac{P_{ijke} du^i du^j du^k du^e}{(g_{ij} du^i du^j)^2}}. \tag{5}$$

Так как Г и Γ_0 имеют общий касательный вектор, то правые части формул (4) и (5) будут одинаковы, так что

$$k\cos\theta = k_0 \quad \textbf{или} \quad R = R_0\cos\theta,$$

где R и R_0—радиусы кривизны соответственно Г и Γ_0.

$$R = \frac{1}{k}, \quad R_0 = \frac{1}{k_0}.$$

Итак, радиус кривизны произвольной кривой на поверхности X_2 в данной точке равен радиусу кривизны нормального сечения Γ_0, взятому в той же точке и с той же касательной, умноженному на косинус угла θ между соприкасающейся плоскостью Γ и гиперплоскостью нормального сечения Γ_0.

Допустим, что X_2 может быть дополнена до гиперполосы так, что ее естественная нормализация будет одновременно и двойственной [1], и исследуем (5), считая, что точка на поверхности остается неподвижной, а касательная нормального сечения вращается в касательной плоскости поверхности.

В нашем случае главные направления тензоров h_{ij}, k_{ij} совпадают [2], и мы назовем их главными направлениями поверхности в точке M. Известно [3], что всякий симметричный тензор второй валентности определяется с помощью главных ортов и главных значений. Если орты главных направлений обозначим через a_i, $\bar{a}_i$, то

$$h_{ij} = \sigma_1 a_i a_j + \sigma_2 \bar{a}_i \bar{a}_j,$$

$$k_{ij} = \tau_1 a_i a_j + \tau_2 \bar{a}_i \bar{a}_j,$$

где (σ_1, σ_2), (τ_1, τ_2)—главные значения тензоров h_{ij}, k_{ij}, соответственно.

Разложим единичный касательный вектор v^i нормального сечения в данной точке по главным направлениям

$$v^i = a^i \cos\varphi + \bar{a}^i \sin\varphi.$$

Подстановка этого выражения в (2) дает

$$\bar{\varkappa} = \bar{\varkappa}_1 \cos^2\varphi + \bar{\varkappa}_2 \sin^2\varphi, \tag{6}$$

где

$$\bar{\varkappa}_1 = \sigma_1 X + \tau_1 Y, \quad \bar{\varkappa}_2 = \sigma_2 X + \tau_2 Y.$$

Это аналог формулы Эйлера для двойственно-нормализованной X_2, вложенной в E_4.

Назовем $\bar{\varkappa}_1$ и $\bar{\varkappa}_2$ главными векторами кривизны поверхности.

Очевидно, что норма $\bar{\varkappa}$ вектора $\varkappa$ выразится так:

$$\varkappa = \sqrt{(\sigma_1^2 + \tau_1^2)\cos^4\varphi + 2(\sigma_1\sigma_2 + \tau_1\tau_2)\cos^2\varphi \sin^2\varphi + (\sigma_2^2 + \tau_2^2)\sin^4\varphi}. \tag{7}$$

Можно доказать, что векторы $\bar{\varkappa}_1$ и $\bar{\varkappa}_2$ и величины $\sqrt{\sigma_1^2 + \tau_1^2}$, $\sqrt{\sigma_2^2 + \tau_2^2}$ не зависят от выбора векторов X и Y. Теперь выясним геометрический смысл коэффициентов $\sqrt{\sigma_1^2 + \tau_1^2}$, $\sqrt{\sigma_2^2 + \tau_2^2}$ в формуле (7).

Положив $\varphi = 0$, мы приводим вектор v^i в совпадение с a_i и получаем нормальное сечение с касательной, идущей по первому главному направлению. При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ получим нормальное сечение с касательной, идущей во втором главном направлении. Обозначим кривизну первого нормального сечения через $\varkappa_1$, а второго—через $\varkappa_2$.

Тогда соответственно при $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ из формулы (7) получаем

$$\varkappa_1 = \sqrt{\sigma_1^2 + \tau_1^2}, \quad \varkappa_2 = \sqrt{\sigma_2^2 + \tau_2^2}. \tag{8}$$

Назовем главными сечениями такие нормальные сечения в данной точке поверхности, касательные к которым идут по главным направлениям, а их кривизны $\varkappa_1$, $\varkappa_2$—главными кривизнами в данной точке поверхности. В силу (8) формула (7) принимает вид

$$\varkappa = \sqrt{\varkappa_1^2 \cos^4\varphi + 2K\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \varkappa_2^2\sin^4\varphi}\,,$$

где K—Гауссова кривизна внутренней геометрии поверхности X_2.

Легко видеть, что между главными кривизнами $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, полной кривизной K и следами ([3]) $S = g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$ и $S^* = g^{\alpha\beta} k_{\alpha\beta}$ тензоров h_{ij} и k_{ij}, соответственно имеет место соотношение

$$\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 = S^2 + S^{*2} - 2K.$$

Назовем асимптотическим в данной точке поверхности X_2 направление, касательное к нормальному сечению с кривизной нуль в этой точке. Для обращения k_0 в нуль необходимо и достаточно, чтобы числитель дроби ([5]) обратился в нуль. Следовательно,

$$P_{ijkr}\, du^i du^j du^k du^r = 0 \quad \text{или} \quad (h_{ij} du^i du^j)^2 + (k_{ij} du^i du^j)^2 = 0.$$

Из последнего следует, что действительные асимптотические направления должны одновременно удовлетворять условиям

$$h_{ij} v^i v^j = 0 \quad \text{и} \quad k_{ij} v^i v^j = 0.$$

При этом, если существуют два действительных асимптотических направления, то $h_{ij} = \lambda k_{ij}$. Это значит, что двумерная двойственно нормализованная X_2 лежит в E_3. Таким образом, больше двух действительных асимптотических направлений поверхность иметь не может.

Ереванский государственный университет

Ա. Վ. ՉԱՔՄԱՋՅԱՆ

Չորս չափի տարածության մեջ երկչափ մակերևույթների կորության տեսության մասին

Այս հոդվածը նվիրված է երկչափ X_2 մակերևույթի ուսումնասիրությանը, որը ընկղմված է չորս չափի էվկլիդյան E_4 տարածությանում: Ընդհանուր դեպքում ցույց է տրվում Մենեյի թեորեմի ընդհանրությունը մակերևույթին պատկանող կորի կորության համար:

Երկակի նորմալացված մակերևույթի համար ստացված է Էյլերի բանաձևը:

$$\varkappa = \varkappa_1 \cos^2 \varphi + \varkappa_2 \sin^2 \varphi,$$

որտեղ՝

$$\varkappa_1 = \sigma_1 X + \tau_2 Y, \quad X_2 = \sigma_2 X + \tau_2 Y:$$

Ապացուցվում է, որ $\varkappa_1$ և $\varkappa_2$ վեկտորները և $\sqrt{\sigma_1^2 + \tau_1^2}$ ու $\sqrt{\sigma_2^2 + \tau_2^2}$ մեծությունները կախված չեն X և Y վեկտորների ընտրությունից: Ստացված է գլխավոր $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ կորությունների, լրիվ K կորության և h_{ij} ու k_{ij} տենզորների հետքերի համար հետևյալ առնչությունը՝

$$\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 = S^2 + S^{*2} - 2K:$$

Սահմանվում է մակերևույթի ասիմպտոտական ուղղությունը: Ասիմպտոտական ուղղությունը որոշելու համար ստացվում է հետևյալ հավասարումը՝

$$(h_{ij}\, du^i du^j)^2 + (K_{ij}\, du^i du^j)^2 = 0:$$

Պարզվում է, որ այդ մակերևույթի ասիմպտոտական ուղղությունները կլինեն իրական, երբ X_2 ընկղմված է E_3-ում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. В. Чакмазян*, ДАН АрмССР т. XXIX, № 1 (1959). [2] *А. В. Чакмазян*, ДАН АрмССР, т. XXX № 4 (1959). [3] *А. П. Норден*, Теория поверхностей, 1956.