ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXXII 1961 3

МАТЕМАТИКА

С. Г. Гаспарян

О характеристической сети и ее некоторых свойствах

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 6/I 1961)

Общая теория сетей и применение инвариантных методов в этой общей теории систематически разработана в ряде исследований проф. Я. С. Дубнова и проф. Н. Ф. Ефимова. В этой заметке в основном будет рассматриваться сопряженная сеть, гармоничная с сетью линий кривизны. Такая сеть рассматривалась многими авторами. Следуя Раффи *(Raffy)* (1) и Н. В. Ефимову (2) будем называть ее характеристической. Тензор характеристической сети имеет следующий вид:

$$l_{ij} = K\gamma_{ij} - H\pi_{ij}, \tag{1}$$

где K — полная, H — средняя кривизны поверхности, а γ_{ij} и π_{ij} ее первый и второй фундаментальные тензоры. Сеть (l_{ij}) дополняет асимптотическую сеть (π_{ij}) и сеть линий кривизны (ρ_{ij}) до тройки взаимно-аполярных сетей $(\tilde{\pi}^{\alpha\beta} l_{\alpha\beta} = \tilde{\rho}^{\alpha\beta} l_{\alpha\beta} = \tilde{\pi}^{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta} = 0)$*. Как и асимптотическая, характеристическая сеть, очевидно, так же инвариантно связана с поверхностью. Нетрудно видеть, что задание сети (l_{ij}) на поверхности с определенной метрикой эквивалентно заданию второй фундаментальной квадратичной формы. Иначе говоря, поверхность полностью (с точностью до движений) определяется метрикой и характеристической сетью. Автором этой статьи доказано (3), что поверхность, следовательно и характеристическая сеть, вполне определяется метрикой и средней кривизной. Оказывается, что при этом среднюю кривизну можно задавать не вполне произвольно. Условия, которые накладываются на нее, представляют из себя систему, состоящую из двух дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка. В статье (3) получены также условия (когда задаем γ_{ij} и H), при выполнении которых может существовать бесконечное число

* Через $\tilde{\pi}^{\alpha\beta}$ и $\tilde{\rho}^{\alpha\beta}$ обозначены, соответственно, приведенные миноры матриц $\|\pi_{ij}\|$ и $\|\rho_{ij}\|$.

поверхностей с одинаковой метрикой и характеристической сетью*. Так как для таких поверхностей кривизны K и H будут общими, то, очевидно, в этом случае будет иметь место изгибание поверхности с сохранением главных кривизн. Не трудно убедиться, что характеристическая сеть может быть действительной только на таких поверхностях, на которых асимптотическая сеть мнимая. Так как $\gamma^{\alpha\beta} l_{\alpha\beta} = -2E$ ($E = H^2 - K$ — эйлерова разность), то сеть (l_{ij}) может быть ортогональной только на сфере. Далее, из выражения (1) тензора l_{ij} легко вытекает, что изотропность рассматриваемой сети характеризует (при исключении сферы) минимальную поверхность. На сфере сеть (l_{ij}) неопределенна.

Обозначим дискриминант тензора l_{ij} через l. Тогда $l = -K\gamma E$, (где γ — дискриминант метрического тензора γ_{ij}). Отсюда видно, что характеристическая сеть может вырождаться, т. е. обе семейства кривых сети (l_{ij}) могут совпасть друг с другом только на поверхностях с нулевой полной кривизной. На таких поверхностях сеть (l_{ij}) будет виртуально-асимптотической сетью. Норма тензора l_{ij} отрицательна для поверхностей с положительной полной кривизной. Следовательно, через каждую точку таких поверхностей проходят две нулевые линии. Штекель из класса изотермических поверхностей выделил те, для которых отношение главных кривизн постоянно ($H^2 : K = c \neq 1, 0$). Не трудно убедиться в том, что поверхность может обладать этим свойством в том и только в том случае, когда тензор характеристической сети l_{ij} аполярен тензору Кодацци ($\pi_{\alpha\beta|k} \bar{l}^{\alpha\beta} = 0$).

Мы видим, что роль рассматриваемой сети огромна, т. к. различные ее свойства в известной мере характеризуют поверхность. В этой заметке мы получим некоторые свойства, которыми обладает сеть (l_{ij}), если ее рассматривать на квадрике и на поверхности вращения. При этом будем использовать выражения одновалентных тензоров τ_i, σ_i и χ_i, полученных Я. С. Дубновым ([4]) и называемых им первым, вторым и третьим чебышевскими тензорами произвольной сети (φ_{ij}). Этими тензорами характеризуются те или иные свойства сетей и поверхностей. В некотором смысле работа является применением одной части вышеупомянутой общей теории.

§ 1. *Инвариантная характеристика поверхностей 2-го порядка.* Чтобы найти эту характеристику, нам необходимо сначала находить тензор $\bar{l}^{ij}$ — взаимный относительно l_{ij}. После ряда преобразований из (1) находим его выражение:

* В ([3]) после задания γ_{ij} и H рассматривается система из трех конечных уравнений, написанных относительно компонентов тензора π_{ij}. Два уравнения этой системы ($\gamma^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta} = 2H$ и $\varepsilon^{\alpha\alpha_1}\varepsilon^{\beta\beta_1}\pi_{\alpha\beta}\pi_{\alpha_1\beta_1} = 2K$) известны из теории поверхностей, а третье конечное уравнение мы получили, когда составили условие интегрируемости для разложения тензора Кодацци $\pi_{ij|k}$ по I, II и IV основным тензорам поверхности. Выше указанное изгибание наступает тогда, когда ранг рассматриваемой системы равняется двум.

$$\widetilde{l}^{\alpha\beta}=\frac{1}{E}(H\widetilde{\pi}^{\alpha\beta}-\gamma^{\alpha\beta}). \tag{2}$$

Далее нужно заметить, что на всякой неразвертывающейся поверхности выполняются следующие условия:

$$\widetilde{l}^{\alpha\beta}\theta_{\alpha\beta k}=\frac{1}{2KE}(K_\alpha\pi_k^\alpha-4KH_k+HK_k), \tag{3}$$

где θ_{ijk} — тензор Дарбу. Тензор θ_{ijk} имеет вид (см. [5])

$$\theta_{\alpha\beta k}=\pi_{\alpha\beta|k}-\frac{3}{4K}K_{(\alpha}\pi_{\beta k)}{}^{*}, \tag{4}$$

где $\pi_{ij|k}$ — тензор Кодацци. Нетрудно убедиться в справедливости условий (2). Для этого необходимо свернуть обе части (3) с помощью $\widetilde{l}^{ij}$ и заметить, что

$$\widetilde{l}^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta|k}=\frac{1}{KE}(2KH_k-HK_k),$$

а

$$-\frac{3}{4K}\widetilde{l}^{\alpha\beta}K_{(k}\pi_{\alpha\beta)}=\frac{1}{2KE}(K_\alpha\pi_k^\alpha-HK_k).$$

Теперь искомая характеристика непосредственно получится. Достаточно вспомнить, что для поверхностей 2-го порядка тензор Дарбу тождественно обращается в нуль. Тогда из (3) будет следовать, что для таких поверхностей

$$K_\alpha\pi_k^\alpha-4KH_k+HK_k=0. \qquad (k=1,\ 2) \tag{5}$$

Обратное также имеет место, т. е. при выполнении условий (5) вытекает тождественное обращение в нуль тензора Дарбу. Исходя из других соображений, ранее также было установлено ([5]), что условия (5) вполне характеризуют поверхности 2-го порядка (с $K\neq 0$). Используя (3), мы можем существующий инвариантный признак (см. ([5])) для неразвертывающихся линейчатых поверхностей

$$\widetilde{\pi}^{\lambda\mu}(\pi_\lambda^\alpha K_\alpha+HK_\lambda-4KH_\lambda)(\pi_\mu^\beta K_\beta+HK_\mu-4KH_\mu)=0$$

написать в более приемлемом виде:

$$\widetilde{l}^{\alpha\beta}\widetilde{l}^{st}\widetilde{\pi}^{\lambda\mu}\theta_{\alpha\beta\lambda}\theta_{st\mu}=0.$$

Об инвариантной характеристике поверхностей вращения. Ниже будем рассматривать также и вопросы, связанные с поверхностями вращения, однако уравнения, характеризующие этот класс поверхностей, не являются эффективными при использовании в данном случае. Поэтому предварительно преобразуем их и приведем к удобному виду. Указанные поверхности (см. ([5])) характеризуются условиями

* Вертикальная черточка в $a_{ij|k}$—знак ковариантного дифференцирования.

$$\widetilde{\rho}^{\alpha\beta} H_\alpha H_\beta = 0, \quad H_1 K_2 - H_2 K_1 = 0. \tag{6}$$

Легко заметить, что из этих условий следует также равенство $\widetilde{\rho}^{\alpha\beta} K_\alpha K_\beta = 0$. Второе условие (6) можно написать также в виде

$$\varepsilon^{\alpha\beta} K_\alpha H_\beta = 0^*. \tag{6a}$$

Но

$$-\gamma E \widetilde{\rho}^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha i} \varepsilon^{\beta j} \rho_{ij}; \quad \varepsilon^{i\alpha} \varepsilon^{\beta j} = \gamma^{i\beta} \gamma^{\alpha j} - \gamma^{ij} \gamma^{\alpha\beta} \text{ и } 2\rho_{ij} = \varepsilon_{i\alpha} \pi^\alpha_j + \varepsilon_{j\alpha} \pi^\alpha_i.$$

Поэтому первое условие (6) можно написать иначе:

$$(\varepsilon^\alpha_{\cdot r} \pi^{\beta r} + \varepsilon^\beta_{\cdot r} \pi^{\alpha r}) (K_\alpha K_\beta) = 0.$$

Если раскрывать скобки и в одном из слагаемых поменять местами индексы суммирования α и β, то оно совпадет с другим слагаемым. Поэтому вместо предыдущего равенства будем иметь:

$$\varepsilon^{\alpha k} \pi^\beta_k K_\beta K_\alpha = 0. \tag{6b}$$

Аналогичным образом из (6) получим равенство

$$\varepsilon^{\alpha k} \pi^\beta_k H_\alpha H_\beta = 0. \tag{6c}$$

Таким образом, (6b) и (6c) вместе эквивалентны условиям (6).

Чебышевские тензоры характеристической сети. Первый чебышевский тензор, который получил Я. С. Дубнов ([e]) для произвольной сети (a_{ij}), определяется равенством:

$$\tau_i = \widetilde{a}^{\alpha\beta} \left(a_{i\alpha|\beta} - \frac{1}{2} a_{\alpha\beta|i} \right). \tag{7}$$

Нетрудно проверить, что τ_i не изменяется при умножении тензора a_{ij} на скалярный множитель. Следовательно, тензор τ_i связан с сетью, а не тензором сети, определяемым с точностью до множителя. Тождественное обращение в нуль первого чебышевского тензора характеризует чебышевскую сеть, т. е. сеть, для которой направление касательной к линиям каждого из ее семейств переносится параллельно в смысле Леви-Чивита вдоль линий другого семейства**. Если же τ_i градиентен, то сеть (a_{ij}) кодацциева. Найдем значение τ_i в случае характеристической сети. Для этого учтем значение тензора $\widetilde{l}^{\alpha\beta}$ (2) и заметим, что

$$l_{\alpha\beta|i} = K_i \gamma_{\alpha\beta} - H_i \pi_{\alpha\beta} - H \pi_{\alpha\beta|i}.$$

Тогда будем иметь

* Здесь и дальше под ε_{ij} понимаем антисимтотический тензор с матрицей $\begin{Vmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ -\sqrt{\gamma} & 0 \end{Vmatrix}$.

** Понятие этих свойств было введено Чебышевым.

$$\tau_i = \frac{1}{E}\,(H\pi^{\alpha\beta} - \gamma^{\alpha\beta})\left(K_\beta\gamma_{i\alpha} - H_\beta\pi_{i\alpha} - \frac{H}{2}\pi_{i\alpha|\beta} - \frac{K_i}{2}\gamma_{\alpha\beta} + \frac{H}{2}\pi_{\alpha\beta}\right).$$

Или после упрощений следующее:

$$\tau_i = \frac{1}{KE}\left(K^2\left(\frac{H}{K}\right)_{|\alpha}\pi^\alpha_i + \frac{H^2}{2}K_i\right). \tag{8}$$

Очевидно, на развертывающихся поверхностях чебышевский тензор сети (l_{ij}) смысла не имеет.

Известно [4], что для сети (a_{ij}) второй чебышевский тензор связан с первым следующим образом:

$$\sigma_i = \Phi^j_i\tau_j, \quad \text{где} \quad \Phi^j_i = \frac{\varepsilon^{j\alpha}a_{\alpha i}}{\left(-\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\alpha_1}\varepsilon^{\beta\beta_1}a_{\alpha\beta}a_{\alpha_1\beta_1}\right)^{1/2}}.$$

Если составить аналогичное выражение для характеристической сети и сделать ряд преобразований, то σ_i в этом случае получит следующий вид:

$$\sigma_i = \frac{\varepsilon^{\alpha\beta}(K\gamma_{\beta i} - H\pi_{i\beta})}{(KE)^{1/2}}\tau_\alpha. \tag{9}$$

Сети равных путей характеризуются с помощью 2-го чебышевского тензора. Находя выражение контравариантного тензора τ^i и свертывая с σ_i, получим выражение

$$\tau^i\sigma_i = \frac{(K\varepsilon^{\alpha r} - \varepsilon^{\alpha\lambda}\pi^r_\lambda)}{(KE)^{1/2}}\tau_\alpha\tau_r. \tag{9'}$$

Если для (a_{ij}) $\tau^i\sigma_i = 0$, то, как показал Я. С. Дубнов ([4]), сеть (a_{ij}) является сетью равных путей.

Для характеристической сети

$$\sigma_\alpha\tau^\alpha = \frac{(K\varepsilon^{\alpha r} - H\varepsilon^{\alpha\lambda}\pi^r_\lambda)\left(A_n\pi^n_\alpha + \frac{1}{2}H^2K_\alpha\right)\left(A_t\pi^t_r + \frac{1}{2}H^2K_r\right)}{(KE)^{5/2}}, \tag{10}$$

где $A_i = KH_i - HK_i$. Ниже мы докажем, что при некоторых условиях рассматриваемая сеть обладает указанным свойством. Далее напишем для сети (a_{ij}) связь (см. [4]) между первым и третьим чебышевскими тензорами.

$$\chi_i = -\frac{H_{(a)}a^\alpha_i - (2H^2_{(a)} - K_{(a)})\delta^\alpha_i}{2(H^2_{(a)} - K_{(a)})}\tau_\alpha{}^*.$$

Если сеть характеристическая, то величины в числителе и знаменателе тензора χ_i будут выражаться через второй основной тензор поверхности и инварианты K и H следующим образом.

$$l^\alpha_i = K\delta^\alpha_i - H\pi^\alpha_i;\quad H^2_{(l)} - K_{(l)} = E(E+K);\quad 2H^2_{(l)} - K_{(l)} = E(2E+K).$$

---

* Через $H_{(a)}$ и $K_{(a)}$ обозначены средняя и полная кривизны тензора a_{ij}.

И тогда для тензора χ_i окончательно получим выражение

$$\chi_i = \tau_i - \frac{1}{2H}\pi_i^\alpha \tau_\alpha. \tag{11}$$

Связь (11) между тензорами τ_i и χ_i имеет место на любой поверхности, кроме минимальной. Тензор χ_i дает возможность выяснить: заданная сеть ромбическая или нет.

§ 2. Теперь используем выражения, полученные для чебышевских тензоров и покажем, что характеристическая сеть имеет и другие интересные свойства. Будем рассматривать, как уже отметили, только поверхности вращения и квадрики, исключая из рассмотрения сферу.

Теорема 1. *На неразвертывающихся поверхностях 2-го порядка сопряженная сеть, гармоничная с сетью линий кривизны, является кодацциевой сетью.*

Сеть кодацциева тогда и только тогда, когда ее чебышевский вектор $\bar{\tau}$ градиентен или, что все равно, когда $\operatorname{rot}\bar{\tau} = 0$. Следовательно, мы должны доказать, что первый чебышевский тензор сети (l_{ij}) градиентен. Если свернуть обе части (5) с помощью тензора π_i^j и заметить, что $\pi_i^\alpha K_\alpha = 4KH_i - HK_i$, то получим

$$H\pi_j^\alpha = (12KHH_j - 3H^2K_j - KK_j):4K.$$

Подставляя найденные для $\pi_i^\alpha K_\alpha$ и $H_\alpha \pi_i^\alpha$ значения в выражение первого чебышевского тензора (8) сети (l_{ij}) и произведя некоторые упрощения, окончательно получим

$$\tau_i = -\frac{1}{4}\left(\ln\frac{K^3}{E^2}\right)_i.$$

Градиентность тензора τ_i доказана. Из доказанной теоремы вытекает, что тензор l_{ij} при надлежащем нормировании будет иметь симметрическую ковариантную производную.

На рассматриваемых поверхностях и вообще, характеристическая сеть не является изотермической. Так как условие $\varepsilon^{\alpha\beta}\tau_{\alpha|\beta} = 0$ выполняется, а ортогональность этой сети, как убедились выше, не имеет место.

Следствие. На поверхностях 2-го порядка сеть линий кривизны изотермическая.

Обозначим первый чебышевский тензор сети (ρ_{ij}) через ρ_i. Чтобы доказать следствие, найдем для указанных поверхностей связь между первыми чебышевскими тензорами сетей (l_{ij}) и (ρ_{ij}). Результат выкладок следующий:

$$\rho_i = \frac{5}{4}\left(2\frac{E_i}{E} - \frac{3}{5}\frac{K_i}{K}\right) - \tau_i.$$

Мы замечаем, что из градиентности тензора τ_i вытекает градиентность тензора ρ_i и обратно. Следовательно, сеть (ρ_{ij}) на поверхностях

2-го порядка так же кодацциева. Но сеть линий кривизны является кроме того и ортогональной сетью $(\gamma^{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta}=0)$, поэтому она изотермическая.

Теорема 2. *На всякой поверхности вращения ее характеристическая сеть—кодацциева.*

Отнесем поверхность вращения к координатам $u^1=z$, $u^2=\vartheta$. Координатными линиями будут меридианы $\vartheta=\mathrm{const}$ и параллели $z=\mathrm{const}$, иначе говоря, линии кривизны рассматриваемой поверхности. При этом основные инварианты K и H поверхности суть функции только от z. Следовательно, можно положить $K_1=K^1(z)$; $K_2=0$; $H_1=H^1(z)$ и $H_2=0$. При этих условиях из (8) будет вытекать, что вторая компонента первого чебышевского тензора характеристической сети, т. е. τ_2, равна нулю. Что же касается первой компоненты, то она будет иметь следующее значение:

$$\tau_1=\frac{1}{KE}\left\{(KH_1-HK_1)\pi_1^1+\frac{1}{2}H^2K_1\right\}.$$

Но компоненты 2-го основного тензора поверхности π_{ij} и π_i^j также зависят только от z. Следовательно, τ_1 есть функция только от z. При $\tau_1=\tau_1(z)$, $\tau_2=0$ вектор $\bar{\tau}$ — градиентен $(\mathrm{rot}\,\bar{\tau}=0)$. Теорема доказана.

Теорема 3. *На всякой поверхности вращения ее характеристическая сеть — ромбическая.*

Сеть является ромбической только при градиентности тензора χ_i. Для доказательства теоремы напишем найденную выше связь между третьим и первым чебышевским тензорами.

$$\chi_i=\tau_i-\frac{1}{2H}\pi_i^{\alpha}\tau_{\alpha}.$$

Оба компонента этого тензора будут:

$$\chi_1=\tau_1-\frac{1}{2H}\pi_1^1\tau_1-\frac{1}{2H}\pi_1^2\tau_2,$$

$$\chi_2=\tau_2-\frac{1}{2H}\pi_2^1\tau_1-\frac{1}{2H}\pi_2^2\tau_2.$$

Вторая компонента χ_2 равна нулю. В самом деле, $\tau_2=0$ (см. выше), а $\pi_2^1=\gamma^{11}\pi_{12}+\gamma^{12}\pi_{12}=0$, так как для сети линий кривизны $\gamma^{12}=\pi_{12}=0$. Но, в данном случае, первая компонента χ_1 будет функцией только от z. Следовательно, $\mathrm{rot}\,\bar{\chi}=0$; теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает, что на рассматриваемых поверхностях сеть (l_{ij}) конформно-чебышевская, т. к. при конформно-римановом преобразовании она переходит в чебышевскую. При этом вектором конформного преобразования будет χ_i.

Теорема 4. *На всякой неразвертывающейся поверхности вращения ее характеристическая сеть конформно-геодезическая.*

Пусть γ_i тензор кривизны произвольной сети (φ_{ij}). Известно [5], что

$$\sqrt{-K_{(\varphi)}}\,\gamma_i = \varphi_i^{\alpha}\tau_{\alpha} - H_{(\varphi)}\tau_i - 2H_{(\varphi)i} + \frac{H_{(\varphi)}K_{(\varphi)i}}{K(\varphi)}. \qquad (i = 1, 2)$$

В случае характеристической сети будем иметь

$$\sqrt{KE}\,\gamma_i = l_i^{\alpha}\tau_{\alpha} + E\tau_i + 2E_i - \frac{(EK)_i}{K}. \qquad (i = 1, 2)$$

Сеть является конформно-геодезической, когда она переходит в геодезическую при конформно-римановом преобразовании метрики. Так как вектор этого преобразования есть геодезический вектор, то рассматриваемая сеть будет характеризоваться градиентностью γ_i. При доказательстве теоремы 2 мы видели, что $\tau_2 = H_2 = K_2 = 0$, а τ_1, есть функция только от z. Поэтому

$$\sqrt{KE}\gamma_1 = l_1^1\tau_1 + E\tau_1 + 2E_1 - \frac{(KE)_1}{K},$$

$$\sqrt{KE}\gamma_2 = l_2^1\tau_1.$$

Так как $l_2^1 = K\gamma_2^1 - H\pi_2^1$, а для указанных поверхностей $\gamma_2^1 = \pi_2^1 = 0$, то $l_2^1 = 0$. Следовательно $\gamma_2 = 0$. Что касается первой компоненты γ_i, то не трудно видеть, что она является функцией от z, т. к. все величины в выражении компоненты γ_1 являются функциями только от z. Поэтому γ_i градиентен; теорема доказана.

Из доказанных теорем 3 и 4 вытекает (согласно общей теории), что для характеристической сети биссекторная сеть — изотермическая и что тангенс половины сетевого угла (исходной сети) мультипликативно-диагонален относительно биссекторной сети.

Теорема 5. *На неразвертывающейся поверхности 2-го порядка характеристическая сеть — ромбическая.*

Используя выражение (8), полученное для первого чебышевского тензора τ_i сети (l_{ij}) и замечая, что $\pi_i^{\alpha}\pi_{\alpha}^j = 2H\pi_i^j - K\gamma_i^j$, мы из (11) после ряда преобразований получим:

$$\chi_i = \tau_i + \frac{1}{2EH}\left[K^2\left(\frac{H}{K}\right)_{|i} - 2HH_{\alpha}\pi_i^{\alpha} + \frac{3}{2K}H^2K_{\alpha}\pi_i^{\alpha}\right].$$

Если теперь учитывать найденные выше значения для $\pi_i^{\alpha}H_{\alpha}$ и $\pi_i^{\alpha}K_{\alpha}$, то после некоторых упрощений окончательно для χ_i будем иметь

$$\chi_i = -\frac{1}{4}\left(\ln\frac{K^3}{EH^2}\right)_{|i}.$$

Градиентность тензора χ_i доказана.

Теорема 6. *Если неразвертывающиеся поверхности 2-го порядка являются одновременно и поверхностями вращения, то на таких поверхностях характеристическая сеть является сетью равных путей.*

Как уже выше упоминали, мы должны показать, что в этом случае для рассматриваемой сети выполняется условие $\tau^{\alpha}\sigma_{\alpha}=0$. Для этого обратимся к выражению (10). Если раскрывать его скобки и вспомнить значения, полученные выше для $K_{\alpha}\pi_{i}^{\alpha}$ и $H_{\alpha}\pi_{i}^{\alpha}$ в случае поверхностей 2-го порядка, то тогда получим члены, часть из которых обратится в нуль в силу того, что симметрические тензоры свертываются с кососимметрическим тензором ε^{ij}, каждый из оставшихся членов будет или иметь один из видов (6a), (6b), (6c), или же они к этим видам приведутся, принимая во внимание, что $\pi_{i}^{k}\pi_{k}^{j}=2H\pi_{i}^{j}-K\gamma_{i}^{j}$. Иначе говоря, все члены обратятся в нуль и получим условие $\tau_{\alpha}\sigma_{\alpha}=0$. Теорема доказана.

Армянский государственный педагогический институт
им. Х. Абовяна

Ս. Գ. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

Խարակտերիստիկ ցանցի և նրա մի քանի հատկությունների մասին

Ցանցերի ընդհանուր տեսությունը և ինվարիանտ մեթոդների կիրառությունը ընդհանուր տեսության մեջ սիստեմատիկորեն մշակվել է պրոֆ. պրոֆ. Յ. Ս. Դուբնովի և Ն. Վ. Եֆիմովի աշխատություններում: Տվյալ հոդվածում դիտարկվում է միայն այն համալուծ ցանցը, որը հարմոնիկ է կորության գծերի ցանցին: Նշանակենք այդպիսի ցանցի տենզորը l_{ij}-ով:

$$l_{ij}=K\gamma_{ij}-H\pi_{ij},$$

որտեղ K-ն և H-ը համապատասխանաբար մակերևույթի լրիվ և միջին կորություններն են, իսկ γ_{ij} և π_{ij} նրա I և II հիմնական տենզորները: (l_{ij}) ցանցը լրացնում է ասիմպտոտական (π_{ij}) և կորության (ρ_{ij}) գծերի ցանցերը մինչև փոխադարձ—ապոլյար ցանցերի եռյակը: Ասիմպտոտական ցանցի նման (l_{ij}) ցանցը մակերևույթի հետ նույնպես կապված է ինվարիանտ ձևով: Որոշակի մետրիկայով մակերևույթի վրա այդ ցանցի տալը համազոր է մակերևույթի ասիմպտոտական ցանցի տալուն: [3] հոդվածում հեղինակին հաջողվել է ապացուցել, որ տալով մակերևույթի մետրիկան և միջին կորությունը կարելի է որոշել խարակտերիստիկ ցանցը, հետևաբար նաև մակերևույթը (դիրքի ճշտությամբ): Պարզվում է, որ այս դեպքում H-ը միանգամայն կամավոր տալ հնարավոր չէ: Նա պետք է բավարարի որոշ պայմանների [տես 3]: Այստեղից եզրակացնում ենք, որ այդպիսի պայմանների դեպքում մակերևույթը կարելի է որոշել դիրքի ճշտությամբ, եթե տանք նրա մետրիկան և խարակտերիստիկ ցանցը: (l_{ij}) ցանցի իզոտրոպ լինելը (սֆերայի բացառման դեպքում) բնութագրում է մինիմալ մակերևույթը: Հետաքրքիր է նաև այն, որ փռվող մակերևույթի վրա (l_{ij}) ցանցի երկու ընտանիքները համընկնում են: Այդպիսի մակերևույթների վրա դիտարկվող ցանցը վիրտուալ—ասիմպտոտական է: Հայտնի է նաև, որ դրական կորություն ունեցող մակերևույթի յուրաքանչյուր կետով 2 զրոյական գծեր են անցնում: Բերված դատողություններն ասում են այն մասին, որ մակերևույթների տեսության մեջ (l_{ij})-ն հսկայական դեր ունի, քանի որ նրա այս կամ այն հատկությունով որոշակի չափով բնութագրվում է մակերևույթը: Տվյալ հոդվածում դիտարկում ենք (l_{ij}) ցանցը հիմնականում պտտման և 2-րդ կարգի մակերևույթի վրա: Նշանակենք այդ ցանցի I, II և III չեբիշևյան տենզորները համապատասխանաբար τ_i, σ_i և γ_i: § 1-ում գտնված է, տվյալ դեպքում, նրանց արտահայտությունները՝ (8), (9) և (11), ինչպես նաև կվադրիկների և պտտման մակերևույթների համար համապատասխանաբար (5) և [(6a), (6b) և (6c)] բնութագրող ինվարիանտ հայտանիշները: Այդ հայտանիշները համարժեք են գոյություն ունեցող (տես [5]) հայտանիշներին, սակայն տվյալ խնդրում օգտագործման համար ավելի էֆեկտիվ դեր ունեն: § 2-ում ապացուցված թեորեմները վերաբերվում են (l_{ij}) ցանցի այն հատկություններին, որոնք մինչև հիմա նկատված չեն եղել այլ հեղինակների կողմից, երբ մակերևույթների նշված դասերն ուսումնասիրվել են (l_{ij})-ի օգնությամբ:

Եթե մակերևույթը 2-րդ կարգի է, ապա նրա վրա խարակտերիստիկ ցանցը Կոդացցու ցանց է (1 թեորեմ): Այս թեորեմի ապացուցման համար օգտվում ենք (l_{ij}) ցանցի չեբիշևյան τ_i տենզորի (8) արտահայտությունից: τ — գրադիենտ է, իսկ այս անհրաժեշտ և բավարար պայման է Կոդացցու ցանց լինելու համար: Նման ձևով ապացուցվում է (2-րդ թեորեմը), որ (l_{ij}) ցանցը նույն հատկությունն ունի նաև պտտման մակերևույթների վրա: Առաջին թեորեմից որպես հետևանք բխում է, որ կվադրիկների վրա կորության գծերի ցանցը իզոտերմիկ ցանց է, որովհետև այդ ցանցը և Կոդացցու ցանց է և օրթոգոնալ է:

Եթե մակերևույթի վրա ցանցի չեբիշևյան տենզորը գրադիենտ է, ապա այդ ցանցը ռոմբիկային է: Ապացուցված է, որ պտտման մակերևույթների վրա (3-րդ թեորեմ), ինչպես նաև չփռվող 2-րդ կարգի մակերևույթների վրա (5-րդ թեորեմ) խարակտերիստիկ ցանցը օժտված է այդպիսի հատկությամբ: Դժվար չէ ցույց տալ, որ չփռվող մակերևույթների վրա (l_{ij}) ցանցը կոնֆորմ-գեոդեզիկ է, այսինքը ցանցը կոնֆորմ-ռիմանյան ձևափոխության ենթարկելով դառնում է գեոդեզիկ ցանց (4-րդ թեորեմ): Համոզվելու համար ցույց ենք տալիս, որ կորության γ_i տենզորը գրադիենտ է $K=0$ մակերևույթների համար:

6-րդ թեորեմը ասում է այն մասին, որ (l_{ij}) ցանցը հավասար ճանապարհների ցանց է, եթե դիտարկվող մակերևույթը փռվող լինելուց բացի միաժամանակ պտտման էլ է: Իրոք, այս դեպքում $\tau_2 \tau_2 = 0$.

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Раффи*, Sur les réseaux diagonals. Bull. Math. Soc. de France. XXX. 1902. [2] *Н. В. Ефимов*, Инвариантные характеристики некоторых сетей и поверхностей. „Труды семинара по векторному и тензорному анализу". Вып. V, 1941. [3] *С. Г. Гаспарян*, „Изгибание поверхностей с сохранением главных кривизн", Сборник научных трудов Педагогического института им. Х. Абовяна, № 5, 1955. [4] *Я. С. Дубнов*, Диагональные свойства сетей, „Труды семинара по векторному и тензорному анализу". Вып. IX, 1952. [5] *В. Ф. Каган*, Теория поверхностей, т. II, М., 1948.