ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXII 1961 2

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. М. Манукян

Кручение призматического стержня прямоугольного сечения в условиях неустановившейся ползучести

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 15/I 1961)

В настоящей работе дается решение задачи кручения призматического стержня прямоугольного сечения в условиях неустановившейся ползучести и изменения модуля мгновенной деформации материала.

При решении этой задачи будем исходить из нелинейных интегральных уравнений теории ползучести, развитой в работе ([1]).

Решение рассматриваемой задачи сводится к решению нелинейного интегро-дифференциального уравнения, решение которого при степенном законе нелинейности дается в ([2]).

§ 1. *Постановка задачи и основные уравнения.* Рассмотрим задачу о кручении призматического стержня, материал которого обладает свойством ползучести. Пусть боковая поверхность стержня свободна от внешних усилий, а к торцам его приложены силы, которые приводятся к крутящему моменту M с вектором, параллельным оси стержня.

Поместим начало прямоугольной системы координат x, y, z в некоторой точке концевого сечения стержня, направив ось z параллельно оси его образующим.

Положим, как и в случае кручения упругих стержней, что

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Тогда уравнение равновесия будет тождественно удовлетворено, если, как обычно, положить

$$\tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{1.2}$$

Здесь функция напряжений U зависит только от x, y, t и удовлетворяет на контуре Г, ограничивающем односвязную область поперечного сечения стержня, условию

$$U = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{1.3}$$

При этом крутящий момент

$$M = 2 \iint_{\Omega} U dx dy, \tag{1.4}$$

где Ω — площадь области, ограниченной контуром Γ.

Условия неразрывности деформаций примут вид

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = -2\theta(t), \tag{1.5}$$

где $\theta(t)$ — заданный угол закручивания на единицу длины стержня.

Как известно, в общем случае пространственного напряженного состояния, уравнения, связывающие интенсивность деформаций $\varepsilon_i(t)$ и интенсивность напряжений $\sigma_i(t)$ с учетом нелинейной ползучести материала и изменения его модуля мгновенной деформации, имеют следующий вид [1]:

$$\varepsilon_i(t) = \frac{\sigma_i(t)}{3G(t)} - \int_{\tau_1}^{t} \sigma_i(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{3G(\tau)} \right] d\tau -$$

$$- \int_{\tau_1}^{t} F[\sigma_i(\tau)] \sigma_i(\tau) \frac{\partial C(t,\tau)}{\partial \tau} d\tau. \tag{1.6}$$

Здесь $C(t, \tau)$ — мера ползучести материала при одноосном напряженном состоянии, $F(\sigma_i)$ — некоторая функция, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести для данного материала, определяемая из опыта в результате испытания на простую ползучесть и нормированная условием $F(1) = 1$, $G(t)$ — модуль мгновенной деформации сдвига, τ_1 — возраст материала в момент приложения нагрузки, t — время. При этом принято

$$\varepsilon_i(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)} \tag{1.7}$$

$$\sigma_i(t) = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \tag{1.8}$$

В рассмотренном случае соотношения, связывающие компоненты деформаций с соответствующими компонентами напряжений с учетом ползучести материала, будут иметь вид:

$$\gamma_{xz}(t) = \frac{\tau_{xz}(t)}{G(t)} - \int_{\tau_1}^{t} \tau_{xz}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{G(\tau)} \right] d\tau -$$

$$- 3 \int_{\tau_1}^{t} F[\sigma_i(\tau)] \tau_{xz}(\tau) \frac{\partial C(t,\tau)}{\partial \tau} d\tau \tag{1.9}$$

$$\gamma_{yz}(t) = \frac{\tau_{yz}(t)}{G(t)} - \int_{\tau_1}^{t} \tau_{yz}(\tau) \frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{G(\tau)}\right] d\tau -$$

$$-3\int_{\tau_1}^{t} F[\sigma_i(\tau)]\, \tau_{yz}(\tau) \frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau} d\tau,$$

где

$$\sigma_i(t) = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}. \tag{1.10}$$

Положим, что $F(\sigma_i)$ имеет вид

$$F(\sigma_i) = \alpha + \beta\sigma_i^{m-1}, \tag{1.11}$$

где α, β, m—постоянные параметры, определяемые из опыта.

Как показывают экспериментальные исследования, степенным законом вида (1.4) достаточно хорошо описываются опытные кривые ползучести в широком диапазоне изменения напряжений $(0 \leqslant \sigma_i \leqslant R)$ для ряда материалов ([2]). Одновременно опыты показывают, что величина β является достаточно малым ($\beta < 1$).

Подставляя выражение $F(\sigma_i)$ из (1.11) в (1.9) и учитывая (1.2), найдем

$$\gamma_{xz}(t) = \frac{1}{G(t)}\frac{\partial U}{\partial y} - \int_{\tau_1}^{t} \frac{\partial U(\tau)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{G(\tau)}\right] d\tau -$$

$$-3\int_{\tau_1}^{t}\left\{\alpha \frac{\partial U(\tau)}{\partial y} + \beta \frac{\partial U(\tau)}{\partial y} [\sigma_i(\tau)]^{m-1}\right\} \frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau} d\tau,$$

$$\gamma_{yz}(t) = -\frac{1}{G(t)}\frac{\partial U}{\partial x} + \int_{\tau_1}^{t} \frac{\partial U(t)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{G(\tau)}\right] d\tau + \tag{1.12}$$

$$+3\int_{\tau_1}^{t}\left\{\alpha \frac{\partial U(\tau)}{\partial x} + \beta \frac{\partial U(\tau)}{\partial x} [\sigma_i(\tau)]^{m-1}\right\} \frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau} d\tau,$$

где

$$\sigma_i = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2}. \tag{1.13}$$

Внося эти выражения для компонентов деформаций в уравнение неразрывности (1.5), получим

$$\Delta U - G(t)\int_{\tau_1}^{t}\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{G(\tau)}\right] + 3\alpha\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}\right\}\Delta U(\tau)\, d\tau -$$

$$- 3\beta G(t) \int_{\tau_1}^{t} L(U) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = -2G(t)\theta(t), \tag{1.14}$$

где Δ—оператор Лапласа по переменным x и y, а L—квазилинейный дифференциальный оператор вида

$$L(U) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial U}{\partial x}\right\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial U}{\partial y}\right\}, \tag{1.15}$$

который представляет собой эллиптический оператор типа Монжа-Ампера.

Таким образом, решение задачи о кручении призматического стержня в условиях нелинейной ползучести свелось к определению функции напряжения $U(x, y, t)$ из нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.14), *содержащего параметр* β *при граничном условии* $U = 0$ на Г.

Только для упрощения дальнейших выкладок будем полагать, что

$$G(t) = G = \text{const}. \tag{1.16}$$

Тогда уравнение (1.14) примет следующий вид

$$\Delta U - \alpha \int_{\tau_1}^{t} \Delta U(\tau) K(t, \tau) d\tau =$$

$$= \beta \int_{\tau_1}^{t} L(U) K(t, \tau) d\tau = -2G\theta(t), \tag{1.17}$$

где

$$K(t, \tau) = 3G \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}. \tag{1.18}$$

§ 2. *Решение основного интегро-дифференциального уравнения* (1.17). Пользуясь методом, развитым в работе ([2]), будем искать решение уравнения (1.17) в виде ряда

$$U(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k U_k(x, y, t). \tag{2.1}$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.14) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим

$$\Delta U_0 - \alpha \int_{\tau_1}^{t} \Delta U_0(\tau) K(t, \tau) d\tau = -2G\theta(t), \tag{2.2}$$

$$\Delta U_1 - \alpha \int_{\tau_1}^{t} \Delta U_1(\tau) K(t, \tau) d\tau = \int_{\tau_1}^{t} L(U_0) K(t, \tau) d\tau, \tag{2.3}$$

$$\Delta U_2 - \alpha \int_{\tau_1}^{t} \Delta U_2(\tau) K(t, \tau) d\tau = m \int_{\tau_1}^{t} L(U_0, U_1) K(t, \tau) d\tau, \tag{2,4}$$

где

$$L(U_0, U_1) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\left(\frac{\partial U_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_0}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial U_1}{\partial x} + \right.$$

$$+ (m-1) \left[\left(\frac{\partial U_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_0}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{m-1}{2} - 1} \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} \frac{\partial U_1}{\partial x} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\partial U_0}{\partial y} \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) \frac{\partial U_0}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[\left(\frac{\partial U_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_0}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial U_1}{\partial y} + \right.$$

$$+ (m-1) \left[\left(\frac{\partial U_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_0}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{m-1}{2} - 1} \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} \frac{\partial U_1}{\partial x} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\partial U_0}{\partial y} \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) \frac{\partial U_0}{\partial y} \right\}. \tag{2.5}$$

Таким образом, решение нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.17) сводится к решению некоторой совокупности линейных рекуррентных интегро-дифференциальных уравнений (2.2), (2.3), (2.4)... с условием (1.4), причем крутящий момент M определяется формулой (1.5).

Теперь рассмотрим задачу о кручении призматического стержня прямоугольного поперечного сечения.

§ 3. *Кручение призматического стержня прямоугольного поперечного сечения.* Рассмотрим задачу о кручении прямоугольного поперечного сечения, стороны которого равны $2a$ и $2b$, а начало координат находится в центре прямоугольника.

Для определения функции $U_0(x, y, t)$ нужно решить уравнение (2.2) с условиями

$$\begin{aligned} U_0(x, y, t) &= 0 \quad \text{при} \quad x = \pm a \\ U_0(x, y, t) &= 0 \quad \text{при} \quad y = \pm b. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Решение можно взять в следующем виде [3]

$$U_0(x, y, t) = \frac{5G\theta(t)}{4} \frac{(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)}{a^2 + b^2}. \tag{3.2}$$

Теперь перейдем к нахождению второго приближения. Подставляя выражение $U_0(x, y, t)$ из (3.2) в (2.3), получим

$$\frac{\partial^2 U_1(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1(x, y, t)}{\partial y^2} = -4\pi\rho(x, y, t), \tag{3.3}$$

где

$$\rho(x, y, t) = \frac{G}{4\pi}\left|\frac{5G\theta(t)}{2(a^2+b^2)}\right|^m \Big\{[(x^2-a^2)+(y^2-b^2)][x^2(y^2-b^2)^2 +$$

$$+ y^2(x^2-a^2)]^{\frac{m-1}{2}} + (m-1)[x^2(y^2-b^2)^2 + y^2(x^2-a^2)^2]^{\frac{m-1}{2}-1} \times$$

$$\times [x^2(y^2-b^2)^3 + y^2(x^2-a^2)^3 + 4x^2y^2(x^2-a^2)(y^2-b^2)]\Big\}. \tag{3.4}$$

Для решения уравнения (3.3) при граничных условиях

$$U_1(\pm a, y, t) = 0, \tag{3.5}$$

$$U_1(x, \pm b, t) = 0, \tag{3.6}$$

умножим его на функцию $\frac{1}{b}\cos\lambda_k y$ (обращающуюся в нуль при $y = \pm b$) и проинтегрируем по частям получившееся выражение от $y = -b$ до $y = b$. Получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2 U_{1,k}(x, t)}{dx^2} - \lambda_k^2 U_{1,k}(x, t) = -4\pi\rho_k(x, t), \tag{3.7}$$

где

$$U_{1,k}(x, t) = \frac{1}{b}\int_{-b}^{b} U_1(x, y, t)\cos\lambda_k y\,dy, \tag{3.8}$$

$$\rho_k(x, t) = \frac{1}{b}\int_{-b}^{b} \rho(x, y, t)\cos\lambda_k y\,dy, \tag{3.9}$$

$$\lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2b}. \tag{3.10}$$

Общее решение уравнения (3.6) можно записать в следующем виде

$$U_{1,k}(x, t) = A_k(t)\operatorname{sh}\lambda_k x + B_k(t)\operatorname{ch}\lambda_k x -$$

$$-\frac{8b}{2k-1}\int_{-a}^{x} \rho_k(z, t)\operatorname{sh}\lambda_k(x-z)\,dz, \tag{3.11}$$

где $A_k(t)$ и $B_k(t)$ — произвольные постоянные.

Пользуясь граничными условиями (3.5) и соотношением (3.8) получим значения $A_k(t)$ и $B_k(t)$ в виде

$$A_k(t) = \frac{4b}{2k-1} \int_{-a}^{a} \rho_k(z, t) \frac{\operatorname{sh} \lambda_k (a-z)}{\operatorname{sh} \lambda_k a} dz,$$

$$B_k(t) = \frac{4b}{2k-1} \int_{-a}^{a} \rho_k(z, t) \frac{\operatorname{sh} \lambda_k (a-z)}{\operatorname{ch} \lambda_k a} dz. \qquad (3.12)$$

Подставляя значения $A_k(t)$ и $B_k(t)$ из (3.12) в (3.10), получим выражение $U_{1,k}(x, t)$ в следующем виде:

$$U_{1,k}(x, t) = \frac{4b}{2k-1} \left\{ (\operatorname{sh} \lambda_k x + \operatorname{th} \lambda_k a \operatorname{ch} \lambda_k x) \int_{-a}^{a} \rho_k(z, t) \operatorname{ch} \lambda_k z dz - \right.$$

$$- (\operatorname{cth} \lambda_k a \operatorname{sh} \lambda_k x + \operatorname{ch} \lambda_k x) \int_{-a}^{a} \rho_k(z, t) \operatorname{sh} \lambda_k z dz -$$

$$\left. - 2 \operatorname{sh} \lambda_k x \int_{-a}^{x} \rho_k(z, t) \operatorname{ch} \lambda_k z dz + 2 \operatorname{ch} \lambda_k x \int_{-a}^{x} \rho_k(z, t) \operatorname{sh} \lambda_k z dz \right\}. \qquad (3.13)$$

После этого из (3.8) найдем функцию $U_1(x, y, t)$ по формуле

$$U_1(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_{1,k}(x, t) \cos \lambda_k y. \qquad (3.14)$$

Если ограничиваться первыми двумя приближениями, то решение дифференциального уравнения (1.17) можно представить в следующем виде:

$$U(x, y, t) = \frac{5G\theta(t)}{4} \frac{(x^2-a^2)(y^2-b^2)}{a^2+b^2} +$$

$$+ \beta \sum_{k=1}^{\infty} U_{1,k}(x, t) \cos \lambda_k y + 0(\beta^2). \qquad (3.15)$$

Из (1.3) и (3.15) следует, что выражения касательных напряжений будут

$$\tau_{xz}(t) = \frac{5G\theta(t)}{2} \frac{(x^2-a^2) y}{a^2+b^2} - \beta \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k U_{1,k}(x, t) \sin \lambda_k y + 0(\beta^2),$$

$$\tau_{yz}(t) = -\frac{5G\theta(t)}{2} \frac{x(y^2-b^2)}{a^2+b^2} - \beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{dU_{1,k}(x, t)}{dx} \cos \lambda_k y + 0(\beta^2).$$

(3.16)

Подставляя выражение $U(x, y, t)$ из (3.15) в (1.5), получим выражение крутящего момента.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР
Ереванский государственный университет

Մ. Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ

Ուղղանկյուն հատույթով պրիզմատիկ ձողի ոլորումը ոչ հաստատված սողքի պայմաններում

Ներկա աշխատության մեջ քննարկվում է ուղղանկյուն հատույթով պրիզմատիկ ձողի ոլորման խնդիրը՝ նյութի ոչ հաստատված սողքի և ակնթարթային դեֆորմացիայի մոդուլի փոփոխման հաշվառումով։

Սողքի ոչ գծային տեսության հիման վրա, որը զարգացված է (1) աշխատության մեջ, քննարկվող խնդրի լուծումը, աստիճանային ոչ գծայնության օրենքի դեպքում, բերվում է ոչ գծային ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման, որի լուծման համար օգտագործվում է (2) հոդվածում շարադրված մեթոդը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Х. Арутюнян*, Некоторые вопросы теории ползучести, Гостехиздат, 1952.

[2] *Н. Х. Арутюнян* и *М. М. Манукян*, Известия АН СССР, ОТН, № 6 (1959), 82–9[illegible].

[3] *Л. В. Канторович* и *В. И. Крылов*, Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, М.—Л., 1950.