ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXXII 1961 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

К. С. Чобанян

О функции напряжений для плоской задачи теории упругости составных тел

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 16/I 1961)

Плоская задача теории упругости составных тел в общей постановке сведена к системе интегральных уравнений Фредгольма—С. Г. Михлиным ([1]) и Д. И. Шерманом ([2,3]).

В настоящей работе рассматриваются условия, определяющие функцию напряжений Эри Ф для плоской задачи теории упругости составных тел. Получены приближенные контурные условия функции Ф для плоской задачи теории упругости тел с тонким усиливающим покрытием.

1. Пусть тело состоит из нескольких спаянных между собой по боковым поверхностям цилиндрических тел с различными характеристиками упругости. Рассмотрим плоское деформированное состояние составного цилиндра.

Области в плоскости деформации, соответствующие различным материалам цилиндра, обозначим через D_1, D_2,...D_k, линию раздела смежных областей D_i и D_j—через L_{ij}, а контур всей области—через L_0.

В случае отсутствия массовых сил напряжения выражаются через функцию напряжений Ф следующим образом ([4]):

$$\sigma_x^i = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2}, \quad \sigma_y^i = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy}^i = -\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x\, \partial y} \quad (i = 1,2...k). \tag{1.1}$$

Здесь Φ_1, Φ_2,...Φ_k обозначают функцию Ф в областях D_1, D_2,...D_k соответственно.

В каждой из областей D_i функция Ф удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\Delta^2 \Phi_i = \frac{\partial^4 \Phi_i}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Phi_i}{\partial x^2\, \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi_i}{\partial y^4} = 0. \tag{1.2}$$

В случае, когда на поверхности тела заданы напряжения, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) &= R_x = -p(s), \\ \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{xy} \cos(n, x) &= R_y = q(s), \end{aligned} \tag{1.3}$$

где n—направление нормали к L_0.

Нормали n к L_0 и L_{ij} направляем так, чтобы направления касательной в сторону возрастания длины s и n составили с системой координат xy одноименную систему. Тогда будем иметь

$$\cos(n, x) = -\cos(s, y) = -\frac{dy}{ds},$$

$$\cos(n, y) = \cos(s, x) = \frac{dx}{ds}. \tag{1.4}$$

Внося (1.1) и (1.4) в (1.3), получаем

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = p(s), \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = q(s) \text{ на } L_0. \tag{1.5}$$

На линиях раздела L_{ij} областей D_i и D_j должны выполняться условия равенства взаимодействий

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}\right) \text{ и } \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x}\right) \tag{1.6}$$

и условия непрерывности перемещений

$$u_i(x, y) = u_j(x, y), \ v_i(x, y) = v_j(x, y) \text{ на } L_{ij}. \tag{1.7}$$

Интегрируя (1.6), находим

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} + A_{ij}, \ \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} + B_{ij}, \tag{1.8}$$

где A_{ij} и B_{ij}—постоянные интегрирования.

Уравнение линии раздела L_{ij} возьмем в параметрической форме

$$x = x_0(s), \ y = y_0(s), \tag{1.9}$$

где s—длина дуги L_{ij}, отсчитываемая от произвольно выбранной на ней точки.

В окрестности линии раздела L_{ij} введем местную систему координат (s, n), связанную с декартовыми координатами соотношениями

$$x = x_0 - ny_0', \ y = y_0 + nx_0', \tag{1.10}$$

где n—расстояние данной точки до линии раздела по ее нормали.

Для краткости изложения начало координатной системы возьмем в некоторой произвольной точке на линии раздела, направляя оси x и y соответственно по касательной и по нормали в этой же точке.

Отметим, что задача отыскания функции Φ по своей постановке инвариантна в отношении параллельного переноса и вращения координатной системы (x, y).

В рассматриваемой точке имеем:

$$x_0=0,\ y_0=0,\ x_0'=1,\ y_0'=0,$$

$$x_0''=0,\ y_0''=\frac{1}{\rho},\ x_0'''=-\frac{1}{\rho^2},\ y_0'''=\left(\frac{1}{\rho}\right)', \tag{1.11}$$

где штрихи обозначают производные по s, а ρ—радиус кривизны L_{ij} в точке $x_0=0$, $y_0=0$.

Выражая деформации через производные перемещений, а напряжения через функцию Φ, из закона Гука, согласно (1.1), получим:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}=\frac{1}{E_i}\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial y^2}-\frac{\nu_i}{E_i}\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial y}=\frac{1}{E_i}\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x^2}-\frac{\nu_i}{E_i}\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial y^2}, \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}=-\frac{2(1+\nu_i)}{E_i}\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x\partial y}.$$

Используя (1.11), производные Φ по x и y выражаем через производные по s и n в точке $x_0=0$, $y_0=0$.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial s},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial\Phi}{\partial n},\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial n^2},\quad \frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3}=\frac{\partial^3\Phi}{\partial n^3},$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial n},\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial s\partial n}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial n}, \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3\Phi}{\partial n\partial s^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\Phi}{\partial n^2}+\left(\frac{1}{\rho}\right)'\frac{\partial\Phi}{\partial s}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\Phi}{\partial n}.$$

Теперь определим $\frac{\partial u_i}{\partial s}$ и $\frac{\partial^2 v_i}{\partial s^2}$, которые на линии раздела должны быть непрерывными:

$$\frac{\partial u_i}{\partial s}=\frac{\partial u_i}{\partial x}=\frac{1}{E_i}\left(\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial n^2}-\nu_i\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial s^2}+\frac{\nu_i}{\rho}\frac{\partial\Phi_i}{\partial n}\right), \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial s^2}=\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_i}{\partial y}. \tag{1.15}$$

Дифференцируя первое соотношение (1.12) по y, а последнее по x и исключая $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x\partial y}$, получаем

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2}=-\frac{2+\nu_i}{E_i}\frac{\partial^3\Phi_i}{\partial x^2\partial y}-\frac{1}{E_i}\frac{\partial^3\Phi_i}{\partial y^3}. \tag{1.16}$$

Используя (1.12), (1.16) и (1.13) из (1.15), получаем:

$$E_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial s^2} = \frac{\partial^3 \Phi_i}{\partial n^3} + (2+\nu_i)\frac{\partial^3 \Phi_i}{\partial s^2 \partial n} - \frac{2}{\rho}\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial n^2} - \frac{1+\nu_i}{\rho^2}\frac{\partial \Phi_i}{\partial n} +$$

$$+ \frac{3+2\nu_i}{\rho}\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial s^2} + (2+\nu_i)\left(\frac{1}{\rho}\right)'\frac{\partial \Phi_i}{\partial s}. \tag{1.17}$$

Используя (1.14) и (1.17), из условий непрерывности $\frac{\partial u_i}{\partial s}$ и $\frac{\partial^2 v_i}{\partial s^2}$ на L_{ij} находим:

$$\frac{1}{E_i}\left(\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial n^2} - \nu_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial s^2} + \frac{\nu_i}{\rho}\frac{\partial \Phi_i}{\partial n}\right) =$$

$$= \frac{1}{E_j}\left(\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial n^2} - \nu_j \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial s^2} + \frac{\nu_j}{\rho}\frac{\partial \Phi_j}{\partial n}\right), \tag{1.18}$$

$$\frac{1}{E_i}\left[\frac{\partial^3 \Phi_i}{\partial n^3} + (2+\nu_i)\frac{\partial^3 \Phi_i}{\partial n \partial s^2} - \frac{1-\nu_i}{\rho^2}\frac{\partial \Phi_i}{\partial n} +\right.$$

$$\left.+ \frac{3}{\rho}\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial s^2} + (2+\nu_i)\left(\frac{1}{\rho}\right)'\frac{\partial \Phi_i}{\partial s}\right] = \frac{1}{E_j}\left[\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial n^3} + (2+\nu_j)\frac{\partial^3 \Phi_j}{\partial n \partial s^2} -\right.$$

$$\left.- \frac{1-\nu_j}{\rho^2}\frac{\partial \Phi_j}{\partial n} + \frac{3}{\rho}\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial s^2} + (2+\nu_j)\left(\frac{1}{\rho}\right)'\frac{\partial \Phi_j}{\partial s}\right]. \tag{1.19}$$

На основании (1.8) и (1.10) получаем

$$\Phi_i = \Phi_j + A_{ij}\, y + B_{ij}\, x + C_{ij} \quad \text{на } L_{ij}, \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial n}(A_{ij}\, y + B_{ij}\, x + C_{ij}) \quad \text{на } L_{ij}, \tag{1.21}$$

где C_{ij}—новая постоянная интегрирования.

Интегрируя условия (1.5) по контуру L_0, находим

$$\Phi = l(s) + A_0 y + B_0 x + C_0 \quad \text{на } L_0, \tag{1.22}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = m(s) + \frac{\partial}{\partial n}(A_0 y + B_0 x + C_0) \quad \text{на } L_0, \tag{1.23}$$

где

$$l(s) = \int_0^s [x_0' \int_0^s q(s)\, ds + y_0' \int_0^s p(s)\, ds]\, ds,$$

$$m(s) = x_0' \int_0^s p(s)\, ds - y_0' \int_0^s q(s)\, ds,$$

A_0, B_0, C_0—постоянные интегрирования.

Таким образом, функция напряжений Φ удовлетворяет в каждой из областей D_i бигармоническому уравнению (1.2), условиям

(1.18)—(1.21) на линиях раздела и контурным условиям (1.22) и (1.23), когда на поверхности составного тела заданы напряжения.

Когда на границе области известны перемещения, контурные условия для функции напряжений Φ получаем таким же путем, каким были получены условия (1.18) и (1.19), не фиксируя точки на границе:

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial n^2} - \nu_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial s^2} + \frac{\nu_i}{\rho} \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = E_i \left(\frac{\partial u_0}{\partial s} x_0' + \frac{\partial v_0}{\partial s} y_0' \right), \tag{1.24}$$

$$\frac{\partial^3 \Phi_i}{\partial n^3} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial n^2} - \frac{1 + 2\nu_i}{\rho^2} \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} + (2 + \nu_i) \frac{\partial^3 \Phi_i}{\partial n \partial s^2} + \frac{3(1 + \nu_i)}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial s^2} +$$

$$+ (2 + \nu_i) \left(\frac{1}{\rho} \right)' \frac{\partial \Phi_i}{\partial s} = E_i \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial s^2} y_0' - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 v_0}{\partial s^2} x_0' - \frac{\partial u_0}{\partial s} y_0^{\cdot} + \frac{\partial v_0}{\partial s} x_0^{\cdot} \right) \text{ на } L_0. \tag{1.25}$$

2. Условия (1.20)—(1.23) содержат постоянные интегрирования, некоторые из которых являются произвольными.

Покажем, что если область D_0 односвязная, то постоянные A_0, B_0 и C_0 произвольны и могут быть приняты равными нулю.

Если функцию напряжений Φ в области D_0 изменить на

$$\Phi_0 = A_0 x + B_0 y + C_0, \tag{2.1}$$

то функция $\Phi + \Phi_0$ будет удовлетворять всем уравнениям, определяющим функцию напряжений, так как Φ_0 удовлетворяет уравнению (1.2) и условиям (1.18)—(1.23), в чем можно убедиться непосредственной проверкой. С другой стороны, согласно (1.1) и (2.1), Φ_0 не влияет на напряженное состояние составного тела. Поэтому можно принять

$$A_0 = B_0 = C_0 = 0. \tag{2.2}$$

На основании (2.2) вместо контурных условий (1.22) и (1.23) будем иметь

$$\Phi = l(s), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = m(s) \quad \text{на } L_0. \tag{2.3}$$

В случае многосвязности D_0 условие (2.2) можно принять очевидно только на одном произвольном контуре. На остальных же контурах постоянные A_0, B_0 и C_0 будут принимать определенные значения, обеспечивающие однозначность упругих перемещений.

Теперь рассмотрим постоянные A_{ij}, B_{ij} и C_{ij} в случае, когда линия раздела L_{ij} либо пересекается с контуром L_0 под углом, отличным от нуля, либо целиком находится внутри области D_0 и является замкнутой кривой.

Если в точках контура, где кончаются линии раздела, сосредоточенные силы отсутствуют, то согласно (1.22) и (1.23) $\Phi(s)$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$, следовательно первые производные Φ по всем направлениям, в окрестностях этих точек должны быть непрерывными. Поэтому постоянные интегрирования в условиях (1.20) и (1.21) должны быть равны нулю

$$A_{ij} = B_{ij} = C_{ij} = 0. \tag{2.4}$$

Используя (2.4), вместо (1.20) и (1.21) будем иметь

$$\Phi_i = \Phi_j, \ \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} \quad \text{на } L_{ij}. \tag{2.5}$$

В случае, когда линия раздела L_{ij} замкнута и целиком находится внутри области D_0, т. е. является контуром одной из внутренних областей, постоянные A_{ij}, B_{ij} и C_{ij} произвольны и могут быть приняты равными нулю. На таких линиях раздела будут справедливы условия (2.5). Доказательство этого утверждения можно проводить таким же путем, как это сделано выше для A_0, B_0 и C_0.

Все эти результаты, относящиеся к постоянным задачи, будут верны и в том случае, когда на контуре заданы перемещения при условии, что они не вызывают сосредоточенных сил, приложенных к точкам границы, где кончаются линии раздела.

Условие однозначности перемещения возьмем в виде

$$\oint du = \oint \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) = 0. \tag{2.6}$$

Здесь интегрирование производится по любому замкнутому контуру в области D_0.

Производные перемещений в условии (2.6) выразим через производные Φ.

Имеем

$$d \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy. \tag{2.7}$$

Используя (1.12), из (2.7) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int\limits_0^s \frac{1}{E_i} \left\{ \left(\frac{\partial^3 \Phi_i}{\partial y^3} - \nu_i \frac{\partial^3 \Phi_i}{\partial x^2 \partial y} \right) x' - \right.$$

$$\left. - \left[(2 + \nu_i) \frac{\partial^3 \Phi_i}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \Phi_i}{\partial x^3} \right] y' \right\} ds + C, \tag{2.8}$$

где интегрирование производится по контуру L, x' и y'—производные координат точки кривой L по длине ее дуги, а C—постоянная интегрирования.

Подставляя значения $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ из (1.12) и (2.8) в (2.6), получаем

$$\oint \frac{1}{E_i}\left(\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} - \nu_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2}\right)dx + \left[\int\limits_0^s \frac{1}{E_i}\left(\frac{\partial^3 \Phi_i}{\partial y^3} - \nu_i \frac{\partial^3 \Phi_i}{\partial x^2 \partial y}\right) x'\, ds - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{2+\nu_i}{E_i}\frac{\partial^3 \Phi_i}{\partial x \partial y^2} + \frac{1}{E_i}\frac{\partial^3 \Phi_i}{\partial x^3}\right) y'\, ds \right] dy = 0. \qquad (2.9)$$

Таким же путем получаем условие однозначности перемещения v

$$\oint \frac{1}{E_i}\left(\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} - \nu_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2}\right)dy + \left[\int\limits_0^s \frac{1}{E_i}\left(\frac{\partial^3 \Phi_i}{\partial x^3} - \nu_i \frac{\partial^3 \Phi_i}{\partial x \partial y^2}\right) y'\, ds - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{2+\nu_i}{E_i}\frac{\partial^3 \Phi_i}{\partial x^2 \partial y} + \frac{1}{E_i}\frac{\partial^3 \Phi_i}{\partial y^3}\right) x'\, ds \right] dx. \qquad (2.10)$$

Условия (2.9) и (2.10) выполняются тождественно, если часть области D_0, заключенная внутри L, односвязна. В противном случае эти условия выполняются при определенных значениях постоянных A_0, B_0 и C_0, входящих в условия (1.22) и (1.23) для контура, лежащего внутри L.

Таким образом, в случае, когда линии раздела в области между собой не пересекаются, не касаются с ее контуром и в точках контуров, где кончаются линии раздела, отсутствуют сосредоточенные силы, функция напряжений Ф должна в области D_0 удовлетворять уравнению (1.2), условиям (2.5) на линиях раздела, условиям (2.3) на внешнем контуре и условиям (1.22), (1. 23), (2.9) и (2.10) на внутренних контурах области D_0.

3. Рассмотрим плоское деформированное состояние упругого тела с тонким усиливающим покрытием.

Пусть D_0 состоит из двух областей D и D_1, соответствующих основному материалу и усиливающему покрытию рассматриваемого тела. Для упрощения задачи определения функции напряжений Ф воспользуемся тонкостью усиливающего покрытия, т. е. малостью толщины покрытия по сравнению с размерами области D и радиусом кривизны линии раздела L.

В области D_1, которая будет иметь форму криволинейной полосы, функцию Ф представим в виде полинома третьей степени по координате n

$$\Phi_1(s, n) = D(s)\, n^3 + F(s)\, n^2 + G(s)\, n + H(s). \qquad (3.1)$$

Из условий (2.3) и (2.5) получаем

$$Dh^3 + Fh^2 + Gh + H = l(s),$$

$$3Dh^2 + 2Fh + G = m(s), \qquad (3.2)$$

$$H = \Phi,\ G = \frac{\partial \Phi}{\partial n}.$$

Здесь Φ и $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ — значения функции напряжений Φ и ее нормальной производной на L.

Внося (3.1) в условия (1.8) и (1.9), получаем

$$2F + \frac{\nu_1}{\rho} G - \nu_1 H'' = \frac{E_1}{E_2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right),$$

$$6D + (2 + \nu_1) G'' - (1 - \nu_1) \frac{G}{\rho} + \frac{3}{\rho} H'' + (2 + \nu_1) \left(\frac{1}{\rho} \right)' H' =$$

$$= \frac{E_1}{E} \left| \frac{\partial^3 \Phi}{\partial n^3} + (2 + \nu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial n \partial s^2} - \frac{1 - \nu}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} + (2 + \nu) \left(\frac{1}{\rho} \right)' \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right|. \quad (3.3)$$

Здесь штрих обозначает производную по длине дуги контура L.

Используя (3.2), из (3.3) получаем приближенные контурные условия, которым должна удовлетворять Φ, когда на контуре известны напряжения

$$6\Phi + h \left| 4 - \frac{h}{\rho} (\nu_1 - \varepsilon \nu) \right| \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \varepsilon h^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} +$$

$$+ h^2 (\nu_1 - \varepsilon \nu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} = 6l(s) - 2hm(s), \quad (3.4)$$

$$12\Phi + h \left| 6 - \frac{h^2}{\rho^2} (1 - \varepsilon - \nu_1 + \varepsilon \nu) \right| \frac{\partial \Phi}{\partial n} + h^3 (2 + \nu_1 - 2\varepsilon - \varepsilon \nu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial n \partial s^2} +$$

$$+ \frac{3h^3}{\rho} (1 - \varepsilon) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} + h^3 \left(\frac{1}{\rho} \right)' (2 + \nu_1 - 2\varepsilon - \varepsilon \nu) \frac{\partial \Phi}{\partial s} =$$

$$= 12l(s) - 6hm(s). \quad (3.5)$$

Здесь $\varepsilon = \frac{F_1}{E}$;

Когда на контуре области D_0 заданы перемещения, контурные условия для функции напряжений Φ получаются таким же путем, каким были получены (3.4) и (3.5), если вместо (2.3) будут использованы условия (1.24) и (1.25).

Таким образом, задача плоской деформации упругого тела с тонким усиливающим покрытием в ее приближенной постановке приводится к той же задаче для однородного упругого тела с контурными условиями (3.4) и (3.5).

Заметим, что приближенное решение, определяемое при помощи условий (3.4) и (3.5), будет близко к точному, если распределение внешней нагрузки на каждом участке контура, длиной порядка толщины контура, близко к равномерному. В случае, когда на контуре приложены сосредоточенные силы, напряженное состояние, определяемое при помощи (3.4) и (3.5), будет сильно отличаться от действительного в окрестностях точек приложения сосредоточенных сил.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Կ. Ս. ՉՈԲԱՆՅԱՆ

Բաղադրյալ մարմինների առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լարումների ֆունկցիայի մասին

Այս աշխատանքում դիտարկվում են կողմնային մակերևույթներով իրար հետ միացված տարբեր առաձգականության մոդուլներ ունեցող գլաններից բաղկացած մարմնի առաձգականության տեսության հարթ դեֆորմացիայի խնդրի լարումների ֆունկցիայի որոշման համար անհրաժեշտ այն պայմանները, որոնք պետք է բավարարվեն տարբեր նյութերին համապատասխանող տիրույթների բաժանման գծերի վրա և տիրույթի եզրում, երբ տրված են մարմնի վրա ազդող արտաքին ուժերը կամ եզրի կետերի տեղափոխությունները: Բազմակապ տիրույթների դեպքում լարումների ֆունկցիան պետք է բավարարի նաև առաձգական տեղափոխությունների միարժեքության պայմաններին:

Ապացուցված է, որ լարումների ֆունկցիան որոշող պայմաններում մասնակցող ինտեգրման հաստատունների մի մասը կամայական են, իսկ մյուս մասը պետք է հավասար լինեն զերոյի, եթե տիրույթի եզրագծի այն կետերում, որտեղ վերջանում են բաժանման գծերը, կենտրոնացված ուժեր չեն կիրառված:

Երբ բաժանման գծերը տիրույթի ներսում չեն հատվում և եզրագծին չեն շոշափում, լարումների Φ *ֆունկցիան պետք է բավարարի (1,2) դիֆերենցիալ հավասարմանը դեֆորմացիայի հարթության համապատասխանող տիրույթում, բաժանման գծերի վրա՝ (2,5), արտաքին եզրի վրա՝ (2,3) և ներքին եզրերի վրա՝ (1,22), (1,23), (2,9) և (2,10) պայմաններին:*

Բարակապատ ծածկույթով մարմնի առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լարումների ֆունկցիայի համար, երբ եզրում հայտնի են արտաքին ուժերը, ստացված են (3,4) և (3,5) մոտավոր եզրային պայմանները:

ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. Г. Михлин*, Труды Сейсмологического института АН СССР, № 66, 1935. [2] *Д. И. Шерман*, Труды Сейсмологического института АН СССР, № 86, 1938. [3] *Д. И. Шерман*, ПММ, т. VII, 1943. [4] *С. П. Тимошенко*, Теория упругости, ОНТИ, 1934.