

А. Г. Багдоев

Проникание давления в сжимаемую идеальную жидкость

(Представлено чл.-корресп. АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 10. XII 1960)

§ 1. *Исследование плоской задачи.* Рассмотрим изэнтропическую задачу проникания давления в нижнее полупространство, занятое идеальной сжимаемой жидкостью. Будем рассматривать осесимметричную задачу. Ось Ox выберем в плоскости поверхности жидкости, ось Oy —в глубь жидкости.

Уравнение политропы для жидкости запишется

$$P = B \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right]. \quad (1.1)$$

Уравнения движения и неразрывности для давления p , составляющих скоростей по осям Ox и Oy , u и v , плотности ρ и скорости звука c запишутся ⁽²⁾:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (1.2)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y},$$

$$\frac{dP}{dt} + c^2 \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{u}{x} \right) = 0.$$

В случае плоской задачи в третьем уравнении (1.2) слагаемое $c^2 \rho \frac{\partial u}{\partial x}$ следует отбросить.

Уравнения характеристики первого семейства для плоского случая (1.2) запишутся ⁽¹⁾:

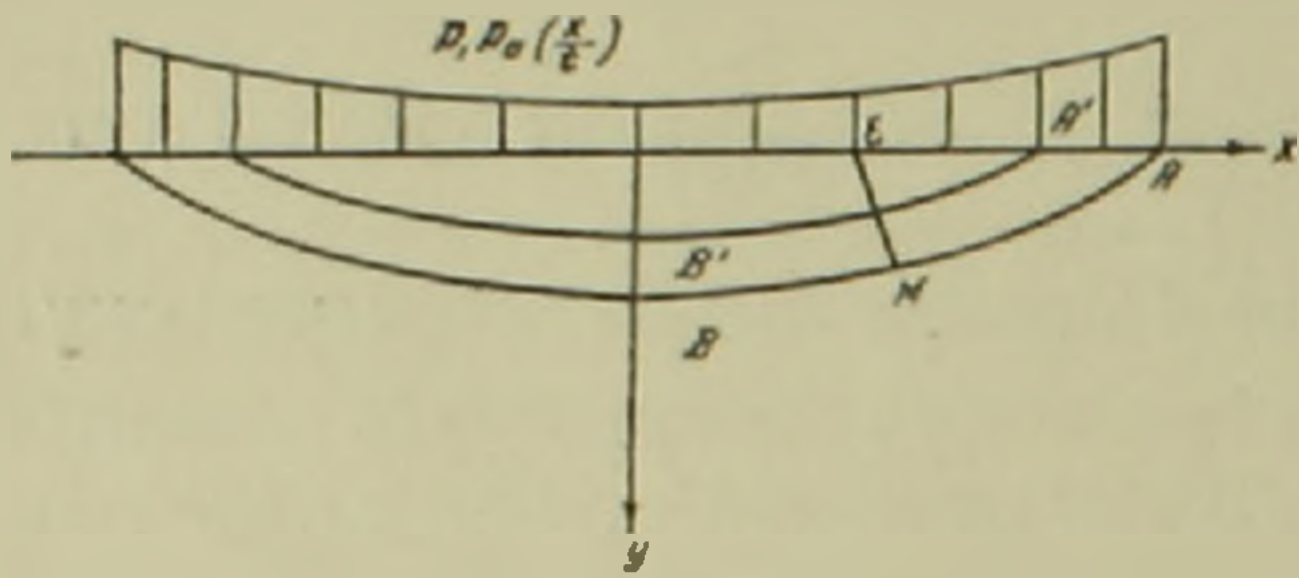
$$\frac{dx}{dt} = u + c \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = v + c \sin \alpha,$$

$$(du)^2 + (dv)^2 = \left(\frac{2}{n-1} \right)^2 (dc)^2, \quad (1.3)$$

Пусть условие для давления на поверхности жидкости автомо-
дельное:

$$P(x, 0, t) = \begin{cases} P_1 P_a \left(\frac{x}{t} \right) & x < Vt \\ 0 & x > Vt \end{cases} \quad (1.4)$$

Будем искать решение с прямолинейными характеристиками. Тогда вдоль характеристик имеем u , v , c , α — постоянны. Уравнения характеристических лучей (1.3) после интегрирования (1.3) и удовлетворения условия в точке E поверхности запишутся (фиг. 1, луч ME):



Фиг. 1.

$$\begin{aligned}x - x' &= (u + c \cos \alpha) (t - t'), \\y &= (v + c \sin \alpha) (t - t'), \\du &= \frac{2}{n-1} dc \cos \alpha, \\dv &= \frac{2}{n-1} dc \sin \alpha,\end{aligned}\tag{1.5}$$

где x' — координата точки E поверхности, t' — момент прохождения характеристической поверхности через точку E , причем $x' = \xi' t'$, где ξ' — постоянная для данной поверхности скорость ее вдоль Ox . Для самого фронта давления на границе жидкости имеем $\xi' = V$. Умножая первое уравнение (1.5) на $\cos \alpha$, второе на $\sin \alpha$ и складывая, найдем:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - (u \cos \alpha + v \sin \alpha + c) t = x' \cos \alpha - (c + U) t'; \quad U = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

В силу условия $x' = \xi' t'$ и условия для угла с осью Ox $\left(\cos \alpha = \frac{c + v}{\xi'} \right)$ имеем $x' \cos \alpha - t' (c + U) = 0$ и

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - (u \cos \alpha + v \sin \alpha + c) t = 0,$$

$$u = \frac{2}{n-1} \int \cos \varphi d\varphi, \quad (1.6)$$

$$v = \frac{2}{n-1} \int \sin \varphi d\varphi,$$

причем u , v , g сохраняют постоянное значение вдоль характеристик. Уравнение (1.6) совпадает с поверхностями уровня для плоской авто-модельной задачи (3).

В случае линейной постановки поверхности уровня (1.6) движутся с постоянной скоростью и решение на фронте дается первой поверхностью уровня $\xi' = V$ и $P = P_1 P_a(V)$ — постоянно.

Для случая произвольного давления на границе

$$P(x, 0, t) = \begin{cases} P_1(x, t) & x < R(t) \\ 0 & x > R(t) \end{cases}$$

решение изэнтропической задачи было получено с помощью обобщений поверхностей (1.6) ⁽⁴⁾. Однако для перехода к линейному случаю этот метод мало пригоден. Лучше искать огибающую волн Римана

$$(x - x')^2 + y^2 = (a_1 + U)^2 (t - t')^2$$

$$U = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad a_1 = c_0 \left(1 + \frac{n-1}{2Bn} P_1 \right),$$

подчиненных условию $x' = \lambda R(t')$. Тогда решение запишется

$$(x - \lambda R)^2 + y^2 = (a_1 + U)^2 (t - t')^2$$

$$- (x - \lambda R) \lambda R' = (a_1 + U)^2 (t - t') + (t - t')^2 \frac{\partial}{\partial t'} (a_1 + U)^2$$

$$c = a_1(x', t'); \quad U = -\frac{P}{\rho_0 c_0}. \quad (1.7)$$

В линейном случае $a_1 = c_0$ и уравнения (1.7) на фронте волны в жидкости AB (фиг. 1) дадут первую поверхность, соответствующую фронту на границе ($\lambda = 1$). Уравнение (1.7) в линейном случае совпадает с огибающей волн, идущих с постоянной скоростью звука, образованных на границе жидкости движущимся фронтом ⁽⁵⁾.

При этом на фронте имеем

$$c = a_1(x', t') \quad x' = R(t'). \quad (1.8)$$

Полученное упрощенное решение в линейном случае показывает, что для произвольного давления $P_1(x', t')$ метод наложения волн Римана верен только для закона скорости $R'(t)$ близкого постоянной. Для любого закона $R'(t)$ в линейной задаче ⁽⁵⁾ существенную роль для затухания давления играет ускорение $R''(t)$, и решение, приведенное выше, будет завышенным значением для решения на фронте. Выведем формулу для давления на фронте в линеаризованной задаче. Условия совместности на характеристике системы (1.2) запишутся:

$$\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{dp}{dt} + \left(\frac{du}{dx} \right) + \left(\frac{dv}{dy} \right) + \frac{u}{x} = 0, \quad (1.9)$$

где $\left(\frac{d}{dx} \right)$, $\left(\frac{d}{dy} \right)$ производные в характеристической поверхности AB (фиг. 1), $u = U \cos \alpha$, $v = U \sin \alpha$, α — угол наклона луча ME с Ox в точке E (фиг. 1).

Поскольку скорость на фронте направлена по нормали к фронту,

используя (1.3) и равенство $\left(\frac{d}{dx}\right) \cos \alpha + \left(\frac{d}{dy}\right) \sin \alpha = \frac{d}{dt}$, имеем вместо (1.9) условие:

$$\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{dP}{dt} + \frac{dU}{dt} - U \sin \alpha \left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + U \cos \alpha \left(\frac{d\alpha}{dy}\right) + \frac{U \cos \alpha}{x} = 0.$$

Обозначим через s длину дуги характеристической кривой AB . Очевидно вдоль AB : $\frac{d\alpha}{ds} = -\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) \sin \alpha + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right) \cos \alpha$, причем $-\frac{d\alpha}{ds}$ есть кривизна кривой AB в точке M в момент t . Учитывая еще связь между давлением и скоростью на фронте для небольших давлений

$$U = \frac{P}{\rho_0 c_0}, \quad (1.10)$$

получим вместо (1.9) соотношение вдоль луча ME в точке M :

$$2 \frac{dP_1}{dt} \frac{1}{c_0} + P \frac{1}{r_{FM}} + \frac{1}{c_0} P \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = 0,$$

где $r_{FM} = \frac{ds}{d\alpha}$ радиус кривизны AB в точке M ; причем $\frac{1}{c_0} r_{FM} = t - t' + \frac{r_0(t')}{c_0}$, а $r_0(t')$ радиус кривизны фронта AB в момент t' в точке E (фиг. 1). Из последнего соотношения, интегрируя, имеем в точке M :

$$P = \frac{A(t')}{\sqrt{t - t' + \frac{r_0(t')}{c_0}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Эта формула была получена нами ранее лучевым методом ⁽⁵⁾.

§ 2. *Осесимметричный автомоделный случай.* Пусть теперь граничное условие дается (1.4), а уравнения движения — (1.2). Определим решение на ударной волне. Введем координаты $\xi = \frac{x}{t}$, $\eta = \frac{y}{t}$.

Тогда в силу автомодельности компоненты скорости движения, давление и скорость звука v_x , v_y , P и c будут функциями от ξ и η . Уравнения характеристик автомоделного движения легко получить из уравнений (1.2), записанных в переменных ξ и η . Для уравнения характеристики первого семейства (линии $A'B'$ фиг. 1) получим:

$$\varphi = v_y - \eta - \frac{d\eta}{d\xi} (v_x - \xi) = -c \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}, \quad (2.1)$$

или, поскольку для волн, догоняющих фронт и движущихся по невозмущенной жидкости, скорость на фронте нормальна к фронту, имеем:

$$\eta - \xi \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{c + U}{\cos \alpha} \quad (2.2)$$

$$v_x = U \sin \alpha, \quad v_y = U \cos \alpha, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = -\tan \alpha$$

α —острый угол кривой $A'B'$ с осью Ox .

Уравнения совместности на характеристике $\eta(\xi)$ запишутся:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\xi} - \frac{(v_x - \xi)\varphi - c^2 \frac{d\eta}{d\xi}}{\rho c^2} - \frac{dv_x}{d\xi} (\varphi + v_x - \xi) + \\ + \frac{dv_y}{d\xi} (v_x - \xi) - \varphi \frac{v_x}{\xi} = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

С помощью (2.2) уравнение (2.3) можно переписать в виде:

$$c \frac{dp}{d\xi} + \rho c^2 \frac{dU}{d\xi} - c \cos \alpha U \rho c^2 \frac{d\alpha}{d\xi} - \frac{c U \rho c^2 \sin \alpha}{\xi - c \sin \alpha - U \sin \alpha} \cdot \frac{1}{\xi} = 0. \quad (2.4)$$

Для строгого решения задачи нужно совместно проинтегрировать (2.2) и (2.4). Для изэнтропического случая достаточно полагать вместо уравнения (1.1), что:

$$c = a_0 \left(1 + \frac{n-1}{2Bn} P \right), \quad \rho = \rho_0 \left(1 + \frac{P}{Bn} \right), \quad U = \frac{P}{\rho_0 a_0}, \quad (2.5)$$

где a_0 и ρ_0 скорость звука и плотность невозмущенной жидкости, причем последнее равенство в (2.5) получится интегрированием характеристик второго и третьего семейства и верно для областей близких к фронту. Можно искать решения (2.4) в виде рядов по степеням $\frac{P}{Bn}$. Учитывая, однако, что в линейном случае лучи (1.3) прямые

линии, можно для небольших $\frac{P}{Bn}$ в уравнении (2.4) пренебречь членом, содержащим кривизну $-\frac{d\alpha}{ds}$:

$$\frac{dP}{\rho c} + \frac{dP}{\rho_0 a_0} - c \frac{P}{\rho_0 a_0} \frac{\sin \alpha}{\xi - c \sin \alpha - U \sin \alpha} \cdot \frac{1}{\xi} d\xi = 0. \quad (2.6)$$

Если подставить (2.5) в (2.6) и отбросить малые выше второго порядка малости, легко получить для $P(\xi)$ линейное обыкновенное дифференциальное уравнение. Если отбросить малые второго порядка, решение (2.6) запишется:

$$P = A \sqrt{\frac{\xi - a_0 \sin \alpha}{\xi}}, \quad (2.7)$$

где постоянная вдоль поверхности $A'B'$ величина A находится из граничного условия в точке A' :

$$\text{при } \xi = \xi' \quad \eta = 0 \quad P = P_1 P_a(\xi') \quad \sin \alpha = \frac{c + U}{\xi'}.$$

Окончательно имеем вдоль $A'B'$

$$P = P_1 P_a(\xi') \sqrt{\frac{\xi - a_0 \sin \alpha}{\xi}} \sqrt{\frac{\xi}{\xi' - a_0 \sin \alpha}}. \quad (2.8)$$

Если оставлять малые второго порядка в левой части (2.8), появится дополнительный множитель:

$$e^{-\frac{n-1}{4Bn} P_1 P_a(\xi)} + \frac{n-1}{4Bn} P_1 P_a(\xi').$$

Подставляя (2.8) в (2.2), найдем дифференциальное уравнение в автомодельных координатах ξ, η произвольной характеристики $A'B'$ (фиг. 1)

$$\frac{\eta - \xi \frac{d\eta}{d\xi}}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}} = c + U, \quad (2.9)$$

причем граничное условие при $\eta = 0$ будет $\xi = \xi'$ (точка A' фиг. 1).

Подставляя вместо c и U их значения через ξ и ξ' из (2.8) и (2.5), интегрируя, получим уравнение $\eta = \eta(\xi, \xi')$ характеристик, обобщающих плоские поверхности уровня (1.6). Сами функции (P, p, c, U) не постоянны и даются (2.8) и (2.5). Записывая еще формулу для

$$\text{скорости ударной волны } D = \frac{c + U + a_0}{2} = - \frac{\eta - \xi \frac{d\eta}{d\xi}}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}}, \text{ под-}$$

ставляя сюда характеристики $\eta = \eta(\xi, \xi')$, получим вдоль фронта ударной волны дифференциальное условие для $\xi'(\xi)$ при условии $\xi'|_{\xi=V} = V$. Для давления на фронте имеем (2.8). Решение найдется как и в (3).

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՒՆՎ

Ճնշման քափանցումը սեղմելի իզեալակաճ հեղուկի մեջ

Աշխատանքում դիտարկվում է սեղմելի իզեալակաճ հեղուկի մեջ ճնշման տարածման առանցքային-մետրիկ խնդիրները:

Հարթ ափսոսողելային խնդրի դեպքում ցույց է տրված, որ շարժման հաճախությունների խարակտերիստիկաները կլինեն ուղիղ գծեր և շարժումը կլինի «պարզ ափսո»

տեսքով: Ոչ ավտոմոդելային խնդրի դեպքում բնութագրերի օգնությամբ ստացվում է դժային խնդրի լուծումը, որը ստացվել էր 3 աշխատանքում հոսադայիային մեթոդով:

Առանցքասիմետրիկ ավտոմոդելային խնդրի դեպքում հաջողվում է խնտեղրայ խա-
րակտերիստիկաները և որոշել հարվածող ալիքի գտնելու մեթոդը խարակտերիստիկ մա-
կերևույթների փոխադրելու ժամանակ մեթոդով: Եթե փնտրենք խարակտերիստիկ հաժառարման
լուծումը երկրորդ մոտափորությամբ, ապա նրանք կրերվեն սոփորական դժային դիֆերեն-
ցիայ հաժառարումների, որոնց լուծումները կտան (առանց հարվածող ալիքի հաշվման)
խնդրի լուծումը:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Ն Ո Ւ Յ ՈՒ Ն

¹ К. П. Станюкович, Неустановившиеся движения сплошной среды, Гостехиз-
дат, М., 1954. ² Н. Е. Кочин, Н. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидроме-
ханика. Гостехиздат, М., 1956. ³ А. Г. Багдоев, „Известия АН АрмССР“, № 3 (1960).
⁴ А. Г. Багдоев и Э. М. Нерсисян, ДАН АрмССР, т. XXX, № 3 (1960). ⁵ А. Г. Багдоев,
ДАН АрмССР, т. XXVIII, № 2 (1959).