ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXII 1961 1

МЕХАНИКА

Д. В. Пештмалджян

Об изгибе ортотропных пластинок

(Представлено чл.-корресп. АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 29. XI 1960)

Рассмотрим поперечный осесимметричный изгиб круглой ортотропной пластинки радиуса a и постоянной толщины h*. Предполагается, что материал пластинки обладает свойством цилиндрической анизотропии, ось анизотропии которой перпендикулярна к срединной плоскости пластинки и проходит через ее центр. Полагается также, что плоскости, параллельные срединной, являются плоскостями упругой симметрии.

В основе лежат следующие предположения:

1) касательное напряжение τ_{rz} по толщине пластинки меняется по закону квадратной параболы, т. е.

$$\tau_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\varphi(r); \tag{1}$$

2) нормальное напряжение σ_z не оказывает существенного влияния на величины деформаций e_{rr}, $e_{\theta\theta}$;

3) прогиб w не меняется по толщине пластинки.

Принятие такого закона распределения τ_{rz} по толщине пластинки, как уже было показано [2], не ограничивает общности полученных ниже результатов.

Основные соотношения и уравнения для рассматриваемого случая могут быть выписаны из [3]. Имеем следующие выражения:

для перемещений

$$u_r=-z\frac{dw}{dr}+a_{55}\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4}z-\frac{z^3}{3}\right)\varphi, \tag{2}$$

$$u_z=w$$

для напряжений

$$\sigma_{rr}=B_r\left[-z\frac{d^2w}{dr^2}-\nu_\theta z\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}+\right.$$

* С учетом гипотезы Кирхгофа эта задача решена С. Г. Лехницким [1].

$$+ a_{55}\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4}z - \frac{z^3}{3}\right)\left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu_\theta \frac{1}{r}\varphi\right)\Bigg], \tag{3}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = B_\theta\Bigg[-\nu_r z\frac{d^2w}{dr^2} - z\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} +$$

$$+ a_{55}\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4}z - \frac{z^3}{3}\right)\left(\nu_r\frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{r}\varphi\right)\Bigg],$$

для моментов и перерезывающей силы

$$M_r = -D_r\frac{d^2w}{dr^2} - D_r\nu_\theta\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + D_r a_{55}\frac{h^2}{10}\left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu_\theta\frac{1}{r}\varphi\right),$$

$$M_\theta = -D_\theta\nu_r\frac{d^2w}{dr^2} - D_\theta\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + D_\theta a_{55}\frac{h^2}{10}\left(\nu_r\frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{r}\varphi\right), \tag{4}$$

$$N_r = \frac{h^3}{12}\varphi, \tag{5}$$

где $B_r = \frac{E_r}{1-\nu_r\nu_\theta}$, $B_\theta = \frac{E_\theta}{1-\nu_r\nu_\theta}$, $D_k = \frac{h^3}{12}B_k$,

E_r, E_θ — модули упругости соответственно в радиальном и тангенциальном направлениях, ν_r, ν_θ — коэффициенты Пуассона ($E_r\nu_\theta = E_\theta\nu_r$), $\frac{1}{a_{55}} = G'$ — модуль сдвига для плоскостей, нормальных к срединной плоскости.

Уравнения равновесия сводятся к следующим двум уравнениям:

$$\varphi = -\frac{12}{rh^3}\int rZdr + \frac{c}{r},$$

$$D_r r\frac{d^3w}{dr^3} + D_r\frac{d^2w}{dr^2} - D_\theta\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} -$$

$$-\frac{h^2}{10}a_{55}\left(D_r r\frac{d^2\varphi}{dr^2} + D_r\frac{d\varphi}{dr} - D_\theta\frac{\varphi}{r}\right) = \frac{h^3}{12}r\varphi, \tag{6}$$

которые могут быть приведены к одному дифференциальному уравнению третьего порядка:

$$\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2} - k\frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr} = \frac{1}{D_r r}\int rZdr -$$

$$-\frac{h^3c}{12D_r r} + a_{55}\left[-\frac{6(1-k^2)}{5hr^3}\int rZdr - \frac{6}{5h}\frac{dZ}{dr} + \frac{h^2}{10}\frac{1-k^2}{r^3}c\right], \tag{7}$$

где $k^2 = \frac{E_\theta}{E_r}$, c — произвольная постоянная.

Рассмотрим круглую пластинку, опертую по контуру и подвергающуюся действию равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивностью q ($Z = q = \text{const}$). В этом случае решение уравнения (7), при $k \neq 1$, $k \neq 3$, имеет вид:

$$w = A + Br^{1+k} + Er^{1-k} + \frac{qr^4}{8(9-k^2)D_r} - \frac{h^3cr^2}{24(1-k^2)D_r} - $$

$$- \frac{3qa_{55}r^2}{10h} + \frac{h^2a_{55}c\ln r}{10}. \tag{8}$$

Ввиду отсутствия угловой точки в центре пластинки и конечного значения прогиба центра, постоянные E и c нужно приравнять нулю. Постоянные A и B определяются из граничных условий, которые имеют вид

$$w = 0$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu_0}{r}\frac{dw}{dr} + \frac{3a_{55}(1+\nu_0)q}{5h} = 0, \quad \text{при } r = a. \tag{9}$$

Определяя постоянные A и B и подставляя в соответствующие формулы для прогиба, напряжений, моментов и перерезывающей силы, окончательно получим:

$$w = \frac{qa^4}{8(9-k^2)D_r}\left[\frac{(3-k)(4+k+\nu_0)}{(1+k)(k+\nu_0)} - \frac{4(3+\nu_0)}{(1+k)(k+\nu_0)}\left(\frac{r}{a}\right)^{k+1} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{r}{a}\right)^4\right] + \frac{3qa_{55}a^2}{10h}\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right], \tag{10}$$

$$\sigma_{rr} = B_r\left\{z\frac{qa^2(3+\nu_0)}{2(9-k^2)D_r}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{k-1} - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] - \right.$$

$$\left. - qa_{55}(1+\nu_0)\left[\frac{3}{20}\left(\frac{z}{h}\right) - \left(\frac{z}{h}\right)^3\right]\right\},$$

$$\sigma_{00} = B_0\left\{z\frac{qa^2}{2(9-k^2)D_r}\left[\frac{(3+\nu_0)(1+\nu_rk)}{k+\nu_0}\left(\frac{r}{a}\right)^{k-1} - \right.\right. \tag{11}$$

$$\left.\left. - (3\nu_r+1)\left(\frac{r}{a}\right)^2\right] - qa_{55}(1+\nu_r)\left[\frac{3}{20}\left(\frac{z}{h}\right) - \left(\frac{z}{h}\right)^3\right]\right\}$$

$$M_r = \frac{q(3+\nu_0)a^2}{2(9-k^2)}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{k-1} - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right], \tag{12}$$

$$M_0 = \frac{qa^2k^2}{2(9-k^2)}\left[\frac{(k\nu_r+1)(3+\nu_0)}{k+\nu_0}\left(\frac{r}{a}\right)^{k-1} - (3\nu_r+1)\left(\frac{r}{a}\right)^2\right].$$

$$N_r = -\frac{qr}{2}. \tag{13}$$

Формулы (10)—(13) справедливы при любом k.

Наибольший прогиб (в центре)

$$w_{max} = \frac{qa^4(4 + k + \nu_0)}{8(3 + k)(1 + k)(k + \nu_0) D_r} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{(3 + k)(1 + k)(k + \nu_0)}{5(4 + k + \nu_0)(1 - \nu_r \nu_0)} \frac{E_r h^2}{G' a^2} \right]. \qquad (14)$$

Моменты и перерезывающая сила не отличаются от соответствующих величин, найденных при наличии гипотезы Кирхгофа. Как уже было отмечено ([1]), величина моментов зависит от отношения модулей упругости. При $k > 1$ моменты в центре обращаются в нуль, а при $k < 1$ неограниченно возрастают при приближении к центру.

Напряжения же содержат дополнительные члены, возникающие от учета касательных напряжений τ_{rz}. Поведение их при приближении к центру аналогично отмеченному выше для моментов. При $k > 1$ — напряжения имеют конечные значения, равные поправке, а при $k < 1$ — неограниченно возрастают.

В отличие от классической постановки радиальные напряжения по всей высоте контура не обращаются в нуль, но их равнодействующая и ее момент равны нулю, что и требуется при удовлетворении граничных условий „в среднем" ([4]). Возникающие таким образом дополнительные напряжения не окажут влияния на распределение напряжений в пластинке на некотором расстоянии от краев ([5]).

Второй член в квадратных скобках в формуле (14) представляет поправку к гипотезе Кирхгофа от учета поперечных сдвигов, величина которой зависит как от геометрических размеров пластинки, так и величины k и отношения $\frac{E_r}{G'}$.

В случае действия сосредоточенной в центре силы ($q = 0$) решение может быть получено из (8) при $c = -\frac{6P}{h^3 \pi}$, получающимся из условия равновесия части пластинки, вырезанной в форме круга произвольного радиуса ([1]). Постоянные A и B определяются из условия свободного опирания по краям, которые в этом случае нагрузки принимают вид:

$$w = 0$$

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu_0}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{3 P a_{55} (1 - \nu_0)}{5 h \pi r^2} = 0, \quad \text{при } r = a. \qquad (15)$$

Окончательно для прогиба, напряжений, моментов и перерезывающей силы (при $k \neq 1$) будем иметь:

$$w = \frac{Pa^2}{4\pi(1 - k^2) D_r} \left[\frac{(1 - k)(2 + k + \nu_0)}{(k + \nu_0)(1 + k)} - \frac{2(1 + \nu_0)}{(k + \nu_0)(1 + k)} \left(\frac{r}{a} \right)^{k+1} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] + \frac{3 P a_{55} \ln \frac{a}{r}}{5 \pi h}. \qquad (16)$$

$$\sigma_{rr} = B_r \left\{ z \frac{P(1+\nu_0)}{2\pi(1-k^2)D_r} \left[\left(\frac{r}{a}\right)^{k-1} - 1 \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{Pa_{55}(1-\nu_0)}{\pi r^2} \left[\frac{3}{20}\left(\frac{z}{h}\right) - \left(\frac{z}{h}\right)^3 \right] \right\}, \tag{17}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = B_\theta \left\{ z \frac{P}{2\pi(1-k^2)D_r} \left[\frac{(1+\nu_0)(k\nu_r+1)}{k+\nu_0} \left(\frac{r}{a}\right)^{k-1} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (1+\nu_r) \right] - \frac{Pa_{55}(1-\nu_r)}{\pi r^2} \left[\frac{3}{20}\left(\frac{z}{h}\right) - \left(\frac{z}{h}\right)^3 \right] \right\},$$

$$M_r = \frac{P(1+\nu_0)}{2\pi(1-k^2)} \left[\left(\frac{r}{a}\right)^{k-1} - 1 \right],$$

$$M_\theta = \frac{Pk^2}{2\pi(1-k^2)} \left[\frac{(1+\nu_0)(k\nu_r+1)}{k+\nu_0} \left(\frac{r}{a}\right)^{k-1} - (1+\nu_r) \right], \tag{18}$$

$$N_r = -\frac{P}{2\pi r}. \tag{19}$$

Как и в случае действия равномерно распределенной нагрузки, моменты и перерезывающая сила не отличаются от соответствующих величин, вычисленных при наличии гипотезы Кирхгофа.

Напряжения (17) содержат поправку от учета касательных напряжений и, независимо от отношения $\frac{E_0}{E_r}$, неограниченно возрастают при приближении к центру. В классической постановке это явление имело место лишь при $k < 1$.

То же происходит и с прогибом (16). Этим уравнением можно пользоваться для вычисления прогиба во всех точках пластинки, не очень близких к точке приложения нагрузки. Указанное явление имеет место и в случае изотропной плиты ([6]).

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ջ. Վ. ՓԵՇՏՄԱԼՋՅԱՆ

Օրթոտրոպ սալերի ծռման մասին

Դիտարկվում է a շառավիղ և h հաստատուն ունեցող կլոր օրթոտրոպ սալի առանցքասիմետրիկ ծռումը: Այս խնդիրը Կիրխհոֆի հիպոթեզի առկայությամբ լուծված է Ս. Գ. Լեխնիցկու կողմից (1):

Հետազոտության հիմքում ընկած են հետևյալ ենթադրությունները.

1. τ_{rz} շոշափող լարումը ըստ սալի հաստության փոփոխվում է տրված օրենքով (1):

2. σ_z նորմալ լարումը էական ազդեցություն չի գործում e_{rr} և $e_{\theta\theta}$ դեֆորմացիաների վրա,

3. w ճկվածքը չի փոփոխվում ըստ սալի հաստության:

Այստեղ դիտարկվող դեպքի համար հիմնական առնչությունները և հավասարումները վերցված են (1) աշխատանքից:

Լուծված են եզրով ազատ հենված կլոր սալի ծռման վերաբերյալ երկու խնդիրներ հետևյալ բեռնվածությունների դեպքում՝ 1) երբ դիտարկվող սալը գտնվում է ամբողջ մակերեսով հավասարաչափ բաշխված բեռի տակ. 2) երբ սալի կենտրոնում ազդում է կենտրոնացված ուժ։

Այստեղ ցույց է տրված, որ հավասարաչափ բաշխված բեռի դեպքում մոմենտները և կտրող ուժերը չեն տարբերվում իրենց համապատասխան մեծություններից՝ որոշված Կիրխհոֆի հիպոթեզի առկայությամբ։ Ինչպես նշվել է ([1]), այդ մոմենտները կախված են առաձգականության մոդուլների հարաբերությունից ($k = \sqrt{E_\theta / E_r}$)։ Ըստ որում, երբ $k > 1$ մոմենտները սալի կենտրոնում դառնում են զերո, իսկ երբ $k < 1$, նրանք սալի կենտրոնին մոտենալիս անսահմանափակորեն աճում են։ Լարումները այստեղ պարունակում են լրացուցիչ անդամներ, որոնք առաջանում են τ_{rz} շոշափող լարումների հաշվի առնելու շնորհիվ։ Լարումները նույնպես, ինչպես և մոմենտները, կախված են k հարաբերությունից, նրանք սալի կենտրոնում, երբ $k > 1$ ստանում են վերջավոր արժեքներ, հավասար լրացուցիչ անդամներին, իսկ երբ $k < 1$, անսահմանափակորեն աճում են։

Այստեղ, ի տարբերություն կլասիկ տեսությամբ ստացվող արդյունքների, σ_r նորմալ լարումները սալի եզրում ըստ հաստության նույնաբար զերո չեն դառնում, բայց նրանց գլխավոր վեկտորը և գլխավոր մոմենտը հավասար են զերոյի, որը և ապահովում է եզրային պայմանների բավարարումը Սեն-Վենանի իմաստով (4)։

(14) բանաձևի մեծ փակագծի մեջ գրված երկրորդ անդամը իրենից ներկայացնում է կլասիկ տեսությամբ հաշված ճկվածքի ճշտումը ընդլայնական սահքերի հաշվի առնելու շնորհիվ, որի մեծությունը կախված է ինչպես սալի չափերից, այնպես էլ k-ից և E_r/G հարաբերությունից։

Կենտրոնացված ուժի դեպքում, ինչպես և հավասարաչափ բաշխված բեռի դեպքում, մոմենտները և կտրող ուժերը չեն տարբերվում իրենց համապատասխան մեծություններից՝ որոշված Կիրխհոֆի հիպոթեզի առկայությամբ։

Լարումները իրենց մեջ պարունակում են ընդլայնական շոշափող լարումների հաշվառման շնորհիվ առաջացած լրացուցիչ անդամներ, որոնք անկախ k հարաբերությունից, անսահմանափակորեն աճում են սալի կենտրոնին մոտենալիս։ Այդ երևույթը խնդրի կլասիկ դրվածքի դեպքում տեղի ունի միայն, երբ $k < 1$, ճկվածքները նույնպես, անկախ k-ի արժեքից, կենտրոնում դառնում են անսահման մեծ։ Այդ պատճառով, ճկվածքների համար ստացված (16) բանաձևից կարելի է օգտվել միայն սալի կենտրոնին ոչ շատ մոտ կետերում ճկվածքները հաշվելիս։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Г. Лехницкий*, Анизотропные пластинки, Огиз Гостехиздат, 1947. [2] *С. А. Амбарцумян*, Изв. АН СССР, ОТН, № 5, (1958). [3] *С. А. Амбарцумян, Д. В. Пештмалджян*, „Изв. АН АрмССР" (серия физ-мат наук), том XII, 1 (1959). [4] *А. И. Лурье*, Пространственные задачи теории упругости, Гостехиздат, 1955. [5] *С. П. Тимошенко*, Теория упругости, ОНТИ ГТТИ, 1931. [6] *С. П. Тимошенко*, Пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1948.