ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXII 1961 1

МАТЕМАТИКА

С. Е. Карапетян

# Преобразование конгруэнции посредством линейчатых поверхностей

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 6. I 1961)

1. В заметке ([1]) было введено понятие сопряженных многообразий поверхностей, принадлежащих гиперквадрике $Q_4^2$ в пятимерном проективном пространстве $P_5$ ([2]). Мы здесь дадим краткое описание способа получения этих многообразий.

Если точка $p_1$ принадлежит гиперквадрике $Q_4^2$, то квадратичная форма, определяемая плюккеровым произведением ([2,3]) $\{dp_1\, dp_1\}$ - устанавливает поляритет на касательной (в точке $p_1$) гиперплоскости гиперквадрики $Q_4^2$. В этом поляритете каждому подпространству $L_m$, иницидентному точке $p_1$ и касательной гиперплоскости, полярно соответствует определенное $L_{4-m}$, которое также принадлежит к касательной гиперплоскости и проходит через точку касания ($p_1$). Нулевые линии формы $\{dp_1\, dp_1\}$ называются асимптотическими линиями гиперквадрики $Q_4^2$. Касательные прямые к этим линиям в каждой точке $p_1$ совпадают с образующими прямыми $Q_4^2$ и все вместе образуют асимптотический трехмерный конус $K_3^2$ второго проядка с вершиной $p_1$. Поляритет формы $\{dp_1\, dp_1\}$ совпадает с полярным соответствием конуса $K_3^2$. Многообразия, полярно соответствующие друг другу относительно конуса $K_3^2$, называются сопряженными.

С помощью этих многообразий в ([1]) было получено одно преобразование данной конгруэнции (в конгруэнцию) по направлению любого семейства линейчатых поверхностей, принадлежащих этой конгруэнции.

В теории поверхностей ([2], [4]) хорошо известно преобразование поверхностей (с помощью конгруэнций) по направлению любого семейства линий, принадлежащих этой поверхности. Здесь мы рассматриваем аналогичную задачу для конгруэнции.

Пусть точка $p_1$ в $P_5$ описывает двухмерную поверхность ($p_1$), т. е. конгруэнцию в $P_3$. Касательной к каждой линии поверхности ($p_1$) прямой $L_1$ полярно (относительно $K_3^2$) соответствует некоторое трехмерное $L_3$. Последнее пересекается с касательной 2-плоскостью поверхности $(p_1)$ по некоторой $L_1'$. Направления $L_1$ и $L_1'$ называются сопряженными в конгруэнции $(p_1)$ ([1]). Характеристика подпространства $L_3$ вдоль $L_1$ есть 2-плоскость $L_2$, которая имеет с касательной 2-плоскостью поверхности $(p_1)$ только одну общую точку $b$. Аналогичную точку $p'$ мы получим, если переменим местами $L_1$ и $L_1'$. Способ построения точек $p$ и $p'$ в $P_3$ приведет к обычному преобразованию Лапласа. Прямая $pp'$ пересекается с $Q_4^2$ в точках $p_1'$ и $p_1''$. В $P_3$ каждая из прямых $p_1'$ и $p_1''$ лежит на одной фокальной плоскости и проходит через другой фокус конгруэнции $(p_1)$. Конгруэнции $(p_1')$ и $(p_1'')$ в дальнейшем называются преобразованиями П конгруэнции $(p_1)$ по сопряженным направлениям (линейчатым поверхностям) $L_1$ и $L_1'$.

В этой статье мы рассмотрим некоторые свойства П преобразований конгруэнции*. В работе применен метод внешних форм Картана ([5]).

2. Инфинитезимальное перемещение тетраэдра $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ определяется дифференциальными уравнениями

$$dA_i = \omega_i^k A_k, \quad i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{1}$$

где $\omega_i^k$ — линейчые дифференциальные формы, связанные структурными уравнениями проективного пространства

$$D\omega_i^k = [\omega_i^j\, \omega_j^k], \quad ([5]).$$

Из уравнений (1) непосредственно получим

$$dp_l = \theta_l^n p_n, \quad l, n = 1,\ 2, \cdots 6, \quad p_1 = (A_1\, A_2),$$

$$p_2 = (A_3\, A_4), \quad p_3 = (A_2\, A_3), \quad p_4 = (A_1\, A_4),$$

$$p_5 = (A_1\, A_3), \quad p_6 = (A_1\, A_2), \quad \theta_1^1 = \omega_1^1 + \omega_2^2,$$

$$\theta_1^2 = \theta_3^4 = \theta_5^6 = \theta_2^1 = \theta_4^3 = \theta_6^5 = 0, \quad \theta_4^2 = -\theta_1^3 = \omega_1^3,$$

$$\theta_1^4 = -\theta_3^2 = \omega_2^4, \quad \theta_1^5 = -\theta_6^2 = \omega_2^3, \quad \theta_1^6 = -\theta_5^2 = \theta_1^4,$$

$$\theta_2^2 = \omega_3^3 + \omega_4^4, \quad \theta_4^1 - = \theta_2^3 = \omega_4^2,$$

$$\theta_2^4 = -\theta_5^1 = \omega_3^1, \quad \theta_6^1 = -\theta_2^5 = \omega_4^1, \quad \theta_5^1 = -\theta_2^6 = \omega_3^2, \quad \theta_3^3 = \omega_2^2 + \omega_3^3, \tag{2}$$

$$\theta_4^4 = \omega_1^1 + \omega_4^4, \quad \theta_5^5 = \omega_1^1 + \omega_3^3, \quad \theta_6^6 = \omega_4^4 + \omega_2^2, \quad \theta_3^5 = -\theta_6^4 = \omega_2^1,$$

$$\theta_5^4 = -\theta_3^6 = \omega_3^4, \quad \theta_4^5 = -\theta_6^3 = \omega_4^3, \quad \theta_5^3 = -\theta_4^6 = \omega_1^2.$$

Дифференциальная окрестность до 4-го порядка луча конгруэнции $(A_1 A_2)$, отнесенная к тетраэдру 1-го порядка, определяется следующими дифференциальными уравнениями (см. ([2]), стр. 344—349)

---

* Ряд других свойств рассмотрен в ([13]).

$$\omega_1^4 = 0,\ \omega_3^4 = \alpha\omega_1^3 - \beta\omega_2^4,\quad \omega_1^2 = \beta\omega_1^3 + \gamma\omega_2^4,\qquad \Delta\alpha = \alpha_1\omega_1^3 - \beta_1\omega_2^4,$$

$$\Delta\beta = \alpha\beta_1\omega_1^3 + \gamma\beta_2\omega_2^4,\qquad \Delta\gamma = \beta_2\omega_1^3 + \gamma\omega_2^4,\qquad \Delta\alpha_1 = \alpha_{11}\omega_1^3 - \beta_{11}\omega_2^4, \tag{3}$$

$$\Delta\beta_1 = \beta_{11}\omega_1^3 + \gamma\beta_{12}\omega_2^4,\qquad \Delta\beta_2 = \alpha\beta_{12}\omega_1^3 + \beta_{22}\omega_2^4\quad \Delta\gamma_2 = \beta_{22}\omega_1^3 + \gamma_{22}\omega_2^4$$

и формулами, полученными из этих заменой указателей: 1 на 2, 3 на 4 и добавлением штрихов при коэффициентах $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ с любыми указателями.

Касательная гиперплоскость квадрики $Q_4^2$ в точке согласно (2) определяется грасмановым произведением пяти точек $(p_1\, p_3\, p_4\, p_5\, p_6)$, а асимптотическое многообразие—дифференциальным уравнением $(a^2 p_1\, p_1\, p_3\, p_4\, p_5\, p_6) = 0$, которое в силу (2) эквивалентно уравнению

$$|dp_1\, dp_1| \equiv \omega_1^3\,\omega_2^4 - \omega_2^3\,\omega_1^4 = 0. \tag{4}$$

Если первое семейство линейчатых поверхностей конгруэнции (3) определяется уравнением

$$\omega_2^4 = \lambda\omega_1^3, \tag{5}$$

то его сопряженное семейство линейчатых поверхностей, согласно вышеизложенному, определяется с помощью полярного уравнения левой части (4). Сопряженное семейство определяется таким образом уравнениями (3) и

$$\omega_2^4 = -\lambda\omega_1^3. \tag{6}$$

При помощи только одного дифференциального уравнения (6) точка опишет в $P_5$ 3-поверхность с касательной 3- плоскостью $(p_1,\ \lambda p_4 + p_3,\ p_5 p_6)$. Характеристика последней 3-плоскости вдоль сопряженного направления (5) есть 2-плоскость

$$|(\lambda_1 + \lambda\lambda_2)\, p_1 - 2\,(\lambda p_1 + p_3),\quad 2\lambda p_5 - (\alpha - 2\lambda\beta - \gamma\lambda^2)\, p_1,$$
$$2\lambda p_6 - (-\gamma' - 2\lambda\beta' - \alpha'\lambda^2)\, p_1|, \tag{7}$$

где

$$d\ln\lambda + \omega_1^1 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \lambda_1\omega_1^3 + \lambda_2\omega_2^4. \tag{8}$$

Двухмерная плоскость (7) является образом второй серии прямолинейных образующих квадрики Ли линейчатой поверхности (5) ([6—8]). Эта плоскость и аналогичная плоскость для линейчатой поверхности (6) пересекаются с касательной плоскостью поверхности $(p_1)$, каждая по одной точке

$$p\,(\lambda_1 + \lambda\lambda_2)\, p_1 - 2\,(\lambda p_4 + p_3),\quad p' = (\lambda_1 - \lambda\lambda_2)\, p_1 - 2\,(-\lambda p_4 + p_3). \tag{9}$$

Прямая $pp'$ пересекается с гиперквадрикой $Q_4^2$ в двух точках

$$p_1' = \lambda_1 p_1 - 2p_3,\quad p_1^{*} = \lambda_2 p_1 - 2p_4. \tag{10}$$

Эти точки являются образами прямых трехмерного пространства. Эти прямые описывают две новые конгруэнции, названные нами преобразованием П. Очевидно, что прямая $p_1^{''}$ проходит через первый фокус $A_1$ луча конгруэнции $(A_1 A_2)$ и принадлежит фокальной плоскости $A_1 A_2 A_4$, а прямая $p_1'$—через второй фокус $A_2$ и лежит в фокальной плоскости $A_1 A_2 A_3$. Так как конгруэнция определяется с произволом двух функций двух аргументов и после задания конгруэнции ее преобразования П однозначно определяются заданием функции $\lambda = \lambda(uv)$, то конгруэнция и ее преобразования П определяются с произволом трех функций двух аргументов.

Для краткости выкладок два ребра $A_1 A_3$ и $A_2 A_4$ совместим со вторыми касательными фокальной сети конгруэнции $(A_1 A_2)$, а два другие ребра $A_1 A_4$ и $A_2 A_3$ с прямыми $p_1^{''}$ и $p_1'$. В результате такого выбора координатного тетраэдра из (3) и (10) получим

$$\beta = 0, \quad \beta' = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0. \tag{11}$$

Дифференцируя внешним образом уравнение (8) и раскрывая по лемме Картана, в силу (11) получим

$$\begin{gathered} 2\omega_3^1 = \lambda_{11}\omega_1^3 + \lambda_{12}\omega_2^4, \quad -2\omega_4^2 = \lambda_{21}\omega_1^3 + \lambda_{22}\omega_1^4, \\ \lambda_{12} - \lambda_{21} = 2(\alpha\alpha' + \gamma\gamma'). \end{gathered} \tag{12}$$

3. Положение прямых (10) зависит только от $\lambda_1$ и $\lambda_2$ и уравнение (8) показывает, что если $\lambda$ является его решением, то $c\lambda (c = \text{const})$ тоже. Из этого следует, что *преобразования* П *по направлению* $\omega_2^4 = \lambda\omega_1^3$ *совпадают с преобразованиями* П *по направлению* $\omega_2^4 = c\lambda\omega_1^3$. В заметке (7) было получено много линейчатых поверхностей $G_i$ конгруэнции, которые обладали известными геометрическими свойствами. Их общее уравнение можно написать в виде

$$\omega_2^4 = c\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\,\omega_1^3. \tag{13}$$

При $c = \pm\sqrt{-1}$ мы из (13) получим линейчатые поверхности, соответствующие асимптотическим линиям первой фокальной поверхности. При $c = \pm 1$ получим гармонические линии той же фокальной поверхности (6–9), т. е. получим такую сопряженную сеть на первой фокальной поверхности, соответствующие линейчатые поверхности которых тоже образуют два сопряженных семейства. При $c = \pm(\varepsilon + \varepsilon_1\sqrt{2})$ $(\varepsilon = \pm 1, \varepsilon_1 = \pm 1)$ получим линейчатые поверхности $G_1$ и т. д. (о поверхностях $G_i$ см. (7)). Аналогичные линейчатые поверхности $G_i'$ получаются и для второй фокальной поверхности конгруэнции. Для конгруэнции $W$ каждая линейчатая поверхность $G_i$ совпадает с $G_i'$. Так как эти линейчатые поверхности определяются дифференциальной окрестностью 2-го порядка, то в дальнейшем мы их назовем *линейчатыми поверхностями окрестности второго порядка* луча конгруэнции.

Таким образом: *все преобразования* П *данной конгруэнции по различным линейчатым поверхностям окрестности 2-го порядка приводят только к одной паре конгруэнции* $(p_3)$, $(p_4)$.

4. Рассмотрим случай, когда преобразования П (пара П) составляют пару $T$ [3]. В работе [1] было доказано, что две конгруэнции составляют пару $T$ тогда и только тогда, когда касательные плоскости их образов в $P_5$ пересекаются по прямой линии. Согласно условию нужно потребовать, чтобы конгруэнции $(A_1 A_4)$ и $(A_2 A_3)$ составляли пару $T$ или, что то же самое, чтобы касательные плоскости к поверхностям $(p_3)$ и $(p_4)$ пересекались по прямой. Касательные 2-плоскости к поверхностям $(p_3)$ и $(p_4)$, как следует из (3) и (2), определяются грассмановыми произведениями

$$\left\{p_3,\ \gamma' p_5 - \frac{\lambda_{11}}{2} p_1 - \alpha p_6,\ p_2 + \frac{\lambda_{12}}{2} p_1\right\},$$
$$\left\{p_4,\ \gamma p_6 + \frac{\lambda_{22}}{2} - \alpha' p_5,\ p_2 - \frac{\lambda_{21}}{2} p_1\right\}. \tag{14}$$

Эти две плоскости пересекаются по прямой линии тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\alpha\alpha' - \gamma\gamma' = 0,\quad \lambda_{12} + \lambda_{21} = 0,\quad \alpha'\lambda_{11} - \gamma'\lambda_{22} = 0. \tag{15}$$

Первое уравнение системы (15) показывает, что $(A_1 A_2)$ является конгруэнцией $W$. Итак, *для того, чтобы пара* П *образовала пару* $T$, *необходимо, чтобы исходная конгруэнция была конгруэнцией* $W$. Интегральное многообразие, определяемое системой (15), *зависит от шести функций одного аргумента*, и эта система не допускает особого решения.

Как известно [2], развертывающиеся поверхности конгруэнции $(p_3)$ определяются уравнением $|dp_3\, dp_3| = 0$. Эта теорема нам поможет легко найти уравнения развертывающихся поверхностей конгруэнций $(p_3)$ и $(p_4)$

$$\lambda_{11}\omega_2^4\omega_1^3 + \lambda_{12}(\omega_1^4)^2 - 2\alpha\gamma'(\omega_1^3)^2 = 0,$$
$$\lambda_{22}\omega_2^4\omega_1^3 + \lambda_{21}(\omega_1^3)^2 + 2\alpha'\gamma(\omega_2^4)^2 = 0. \tag{16}$$

В силу системы (15) из уравнений (16) вытекает, что развертывающиеся поверхности обоих преобразований П соответствуют друг другу.

Таким образом: *если пара* П *является парой* $T$, *то развертывающиеся поверхности одной конгруэнции этой пары соответствуют развертывающимся поверхностям другой конгруэнции*. Эта теорема одновременно показывает, что *пара* П *не может составить наиболее общую пару* $T$.

Если развертывающиеся поверхности (16) одной конгруэнции $(p_3)$ пары П соответствуют сопряженным линейчатым поверхностям

($\lambda_{11}=0$) исходной конгруэнции, то в силу (15) другая конгруэнция тоже удовлетворяет этому требованию ($\lambda_{22}=0$), и в этом случае *обе конгруэнции пары* П *являются конгруэнциями* $W$.

5. В этом пункте мы рассмотрим случай, когда пара П составляет пару $A_0$ ([1, 3, 10]). Как известно ([10]), пара конгруэнций составляет пару $A_0$, если она содержит по меньшей мере одну пару линейчатых расслояющихся поверхностей. В $P_5$ пара $A_0$ характеризуется следующей теоремой ([1]): две конгруэнции составляют пару $A_0$ тогда и только тогда, когда их касательные плоскости в $P_5$ пересекаются в одной точке. Согласно этой теореме пара П составит пару $A_0$, если две плоскости (14) имеют одну общую точку, а это приведет либо к равенству $\alpha\alpha'-\gamma\gamma'=0$, либо к двум равенствам $\lambda_{12}+\lambda_{21}=0$, $\alpha'\lambda_{11}-\gamma'\lambda_{22}=0$. Первое уравнение показывает, что $(p_1)$ является конгруэнцией $W$ и так как в этом случае не накладывается условие на семейство линейчатых поверхностей (на $\lambda$) конгруэнции $(p_1)$, по которым берутся преобразования П, то справедлива следующая теорема: *преобразования* П *конгруэнции* $W$ *по любому семейству линейчатых (не развертывающихся) поверхностей всегда составляют пару* $A_0$.

6. Рассмотрим случай, когда пара П образует пару $\theta$ конгруэнций ([11–13]). В работе ([1]) было доказано, что две конгруэнции составляют пару $\theta$ тогда и только тогда, когда полярно-сопряженная плоскость касательной плоскости одной конгруэнции в $P_5$ имеет общую прямую с касательной плоскостью другой конгруэнции. В $P_5$ первая плоскость (14) имеет полярно-сопряженную плоскость

$$(p_3,\ \gamma' p_5+\alpha p_6,\quad 2\gamma' p_2+\lambda_{11}p_6-\lambda_{12}\lambda' p_1).$$

Эта плоскость имеет общую прямую со второй плоскостью (14) тогда и только тогда, когда

$$\lambda_{11}=\lambda_{22}=0,\quad \alpha\alpha'+\gamma\gamma'=0,\quad \lambda_{12}-\lambda_{21}=0. \tag{17}$$

Второе уравнение системы (17) показывает, что $(A_1 A_2)$—есть конгруэнция $V$. Таким образом: *для того, чтобы пара* П *составляла пару* $\theta$, *необходимо, чтобы исходная конгруэнция была конгруэнцией* $V$. В силу первых двух уравнений (17) из уравнений (16) исчезнут члены, содержащие произведение $\omega_1^1\omega_2^1$, следовательно, развертывающиеся поверхности преобразования с фокальными поверхностями $(A_1)$ и $(A_2)$ исходной конгруэнции пересекаются по линиям, соответствующим сопряженным семействам линейчатых поверхностей. Здесь справедлива следующая теорема: *если развертывающиеся поверхности обоих преобразований* П *конгруэнции* $V$ *соответствуют сопряженным линейчатым поверхностям этой конгруэнции, то преобразования* П *составляют пару* $\theta$ *и наоборот*.

Интегральное многообразие, определяемое системой (17), зависит от шести произвольных функций одного аргумента.

7. Рассмотрим преобразования П конгруэнции $(A_1 A_2)$ по линейчатым поверхностям окрестности 2-го порядка. Как уже было сказано, преобразования П по всем этим направлениям приводят только к одной паре П конгруэнции.

Общее уревнение линейчатых поверхностей окрестности 2-го порядка, как известно ([7]), пишется в виде

$$\omega_2^1 = c\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\,\omega_1^2, \quad c = \text{const}. \tag{18}$$

При различных (вообще комплексных) постоянных значениях мы получим различные семейства линейчатых поверхностей окрестности 2-го порядка. Так как в этом случае $\lambda = c\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$, то дифференцируя последнее обычным образом, в силу (11), (3) и (12) получим

$$\begin{gathered} 2\lambda_1 = \alpha_1 - \beta_2 = 0, \quad -2\lambda_2 = \beta_1 + \gamma_2 = 0, \quad 2\lambda_{11} = \alpha_{11} - 2\beta_{12} \\ 2\lambda_{12} = 3\alpha\alpha' + \gamma\gamma' - \beta_{11} - \beta_{22}, \quad -2\lambda_{21} = \alpha\alpha' + 3\gamma\gamma' + \beta_{11} + \beta_{22}, \\ -2\lambda_{22} = \gamma_{22} + \gamma\beta_{12}. \end{gathered} \tag{19}$$

Внося эти значения в систему (15), получим

$$\alpha\alpha' - \gamma\gamma' = 0, \quad \beta_{11} + \beta_{22} = 0, \quad \alpha'\alpha_{11} + \gamma'\gamma_{22} = 0. \tag{20}$$

Эти уравнения характеризуют новый класс конгруэнций $R$. Таким образом:

*Пара преобразований* П *по направлениям линейчатых поверхностей окрестности 2-го порядка составляет пару* $T$ *тогда и только тогда, когда исходная конгруэнция является частным классом* (20) *конгруэнции* $R$.

Армянский педагогический институт
им. Х Абовяна

Ս. Ե. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

**Կոնգրուենցիաների ձևափոխությունները գծավոր մակերևույթների միջոցով**

*Հենվելով* (1) *նշված արդյունքների վրա այստեղ ստացված են կոնգրուենցիայի նոր ձևափոխություններ, որոնք կապված են այդ կոնգրուենցիային պատկանող գծավոր մակերևույթների հետ։*

*Յուրաքանչյուր գծավոր մակերևույթին համապատասխանում են երկու կոնգրուենցիաներ, որոնք անվանվում են* Π *ձևափոխություններ։ Ստացված են հետևյալ արդյունքները.*

*1) Կոնգրուենցիայի* II *կարգի շրջապատի բոլոր գծավոր մակերևույթների* Π *ձևափոխությունները համընկնում են։*

*2) Միայն* $W$ *կոնգրուենցիաները կարող են թույլ տալ* $T$ *զույգ կազմող* Π *ձևափոխություններ։*

*3)* $T$ *զույգ կազմող* Π *ձևափոխությունների երկու կոնգրուենցիաների փոկալ մակերևույթները իրար համապատասխանում են։*

*4)* $W$ *կոնգրուենցիայի ցանկացած* Π *ձևափոխությունների զույգը կազմում է* $A_0$ *զույգ։*

*5) Միայն V կոնգրուենցիան կարող է թույլ տալ Θ զույգ կազմող Π ձևափոխություններ։*

*6) V կոնգրուենցիայի Π ձևափոխությունները կկազմեն Θ զույգ այն և միայն այն դեպքում, երբ Π-ի յուրաքանչյուր կոնգրուենցիայի ֆոկալ մակերևույթները համապատասխանեն V կոնգրուենցիայի համալուծ մակերևույթներին։*

*7) Միայն R կոնգրուենցիան կարող է թույլ տալ T զույգ կազմող Π ձևափոխություններ, որոնք կապված լինեն այդ կոնգրուենցիայի II կարգի շրջապատի գծավոր մակերևույթների հետ։*

## ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Е. Карапетян*, Сопряженные многообразия и их приложение. ДАН СССР, т. 133, № 5 (1960). [2] *С. П. Фиников*, Теория конгруэнций. 1950. *С. П. Фиников*, Теория пар конгруэнций. 1956. [4] *С. П. Фиников*, Проективно-дифференциальная геометрия. 1937. [5] *С. П. Фиников*, Метод внешних форм Картана. 1948. [6] *С. Е. Карапетян*, ДАН СССР, т. 117, № 2 (1957). [7] *С. Е. Карапетян*, ДАН СССР, 122, 3 (1958). [8] *С. Е. Карапетян*. Две конгруэнции с общими инвариантами $F$ и $F$. Научные доклады ВШ, 2 (1958). [9] *С. Е. Карапетян*, Геометрические значения некоторых инвариантов конгруэнций. Научные доклады ВШ, 1 (1958). [10] *С. Е. Карапетян*, „Известия АН АрмССР", XII, 4 (1959). [11] *С. Е. Карапетян*, Конфигурация Θ Попова, Сборник научных трудов Арм. пед. ин-та им Х. Абовяна, 5 (1955). [12] *С. Е. Карапетян*, Замкнутый цикл четырех конгруэнций. Мат. сборник, 41 (83), 2 (1957). [13] *С. Е. Карапетян*, „Известия АН АрмССР" (сер. физ-мат.), т. VIII, № 4 (1960).