ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXXII 1961 1

МАТЕМАТИКА

Е. Г. Гольштейн

Об одной экстремальной задаче для гармонических полиномов

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 2.XI 1960)

Цель настоящей заметки состоит в установлении точной оценки роста гармонических полиномов четного числа переменных, ограниченных по модулю на сфере соответствующей размерности.

1. Произвольный гармонический полином m переменных степени n в сферических координатах

$$r,\ \theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_{m-2},\ \varphi$$

имеет вид:

$$P_n(r,\ \theta_1, \ldots,\ \theta_{m-2},\ \varphi) = \sum_{k=0}^{n} r^k Y_k^{(m)}(\theta_1, \ldots,\ \theta_{m-2},\ \varphi), \tag{1}$$

где через $Y_k^{(m)}(\theta_1,\ \theta_2, \ldots,\ \theta_{m-2},\ \varphi)$ обозначена некоторая сферическая функция порядка k, соответствующая m-мерному пространству. Пусть $c_n^{(\lambda)}(x)$, $\lambda = \frac{l}{2}$; $l = 1,\ 2, \ldots$, — многочлен степени n из системы ортогональных на $[-1,\ 1]$ по весу $(1-x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}$ многочленов, удовлетворяющий условию:

$$c_n^{(\lambda)}(1) = \frac{2\lambda(2\lambda+1)\cdots(2\lambda+n-1)}{n!}.$$

Многочлены $c_n^{(\lambda)}(x)$ принято называть полиномами Гегенбауэра.

Известно (см. напр. [1]), что любая сферическая функция

$$Y_s^{(m)}(\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_{m-2},\ \varphi)$$

может быть выражена через некоторые сферические функции

$$Y_k^{(m-1)}(\theta_2,\ \theta_3,\ \ldots,\ \theta_{m-2},\ \varphi)$$

по формуле

$$Y_s^{(m-1)}(\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_{m-2},\ \varphi) = a_s c_s^{\left(\frac{m-2}{2}\right)}(\cos\theta_1) +$$

$$+\sum_{k=1}^{s} c_{s-k}^{\left(\frac{m-2}{2}+k\right)}(\cos\theta_1)\sin^k\theta_1 Y_k^{(m-1)}(\theta_1, \ldots, \theta_{m-2}, \varphi). \qquad (2)$$

Заметим, что

$$Y_s^{(2)} = a_s \cos s\varphi + b_s \sin s\varphi. \qquad (3)$$

Таким образом, соотношения (1), (2), (3) определяют общий вид гармонических полиномов, записанных в сферических координатах. Из формул (1), (2), в частности, следует, что произвольный гармонический полином m переменных степени не выше, чем n, зависящий лишь от сферических координат, r, θ_1 может быть представлен в виде

$$Q_n(r, \theta_1) = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k c_k^{\left(\frac{m-2}{2}\right)}(\cos\theta_1).$$

Через $T_k^{(m)}(r, \theta_1)$ обозначим гармонический полином, совпадающий на единичной сфере m-мерного пространства с функцией $\cos k\theta_1$.

Очевидно, что найдутся такие коэффициенты a_k^1, что

$$Q_n(r, \theta_1) = \sum_{k=0}^{n} a_k^1 T_k^{(m)}(r, \theta_1). \qquad (4)$$

Формула (4) дает общий вид гармонических полиномов, зависящих лишь от r и θ_1.

Используя известную формулу Пуассона, нетрудно убедиться, что

$$T_k^{(m)}(r, 0) = \frac{(1-r)^2 \omega_{m-1}}{\omega_m} \int_0^{\pi} \frac{\cos k\theta \sin^{m-2}\theta d\theta}{(1 - 2r\cos\theta + r^2)^{\frac{m}{2}}}, \qquad (5)$$

где ω_m — площадь поверхности единичного m-мерного шара, $r < 1$.

С помощью несложного преобразования равенства (5) можно далее установить следующее реккурентное соотношение:

$$T_k^{(m)}(r, 0) = \frac{1}{2r(m-3)} \left[(m-3+k) T_{k+1}^{(m-2)}(r, 0) + \right.$$

$$\left. + (m-3-k) T_{k-1}^{(m-2)}(r, 0)\right], \qquad k = 1, 2, \ldots; \ m = 4, 5, \ldots \qquad (6)$$

Заметим, что

$$T_k^{(2)}(r, 0) = r^k, \quad k = 0, 1, \ldots \qquad (7)$$

2. После этих предварительных замечаний перейдем к формулировке основного результата.

Теорема. Пусть $P_n(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m-2}, \varphi)$ *— произвольный гармонический полином m-переменных степени не выше, чем n, удовлетворяющий условию*

$$\max_{r<\rho} |P_n(r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-2}, \varphi)| = M. \qquad (8)$$

Если $m = 2l$, $l = 1, 2, \ldots$, то для любого $R \geqslant \rho$

$$|P_n(R, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m-2}, \varphi)| \leqslant M T_n^{(m)}\left(\frac{R}{\rho}, 0\right). \tag{9}$$

Оценка (9) точная, причем единственным гармоническим полиномом, для которого (9) переходит в равенство, является

$$M T_n^{(m)}\left(\frac{r}{\rho}, \gamma\right),$$

где γ — угол между радиусами-векторами, направленными в точки с координатами: $(R, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m-2}, \varphi)$ и $(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m-2}, \varphi)$.

Доказательство теоремы основывается на следующих двух утверждениях.

Лемма 1. *Если последовательность: $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ обладает свойствами:*

а) $\lambda_0 \geqslant 0$;

б) $\lambda_1 - \lambda_0 > 0$;

в) $\{\lambda_k\}$ — *выпуклая вниз последовательность, т. е.* $\lambda_s - 2\lambda_{s-1} + \lambda_{s-2} \geqslant 0$, $s = 2, 3, \ldots, n$; *то из условия*

$$\max_{0 \leqslant \varphi \leqslant \pi} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \cos k\varphi \right| = M$$

следует, что

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_k \right| \leqslant M \lambda_n$$

причем это неравенство переходит в равенство лишь при

$$a_k = \begin{cases} 0, & k \leqslant n-1 \\ M, & k = n \end{cases} \tag{10}$$

Лемма 2. *Если $l = 1, 2, \ldots$, и $r \geqslant 1$, то последовательность $\{T_k^{(2l)}(r, 0)\}_k$ удовлетворяет условиям леммы 1.* За недостатком места доказательства этих утверждений опускаются.

Доказательство теоремы. Будем считать, что $\rho = 1$, а точка, в которой необходимо произвести оценку полинома, расположена на луче: $\theta_1 = 0$. Общий случай может быть получен с помощью соответствующего преобразования переменных.

Положим

$$Q_n(r, \theta_1) = \frac{1}{\omega_{m-1}} \int_0^{\pi} (m-3) \cdots \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P_n(r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-2}, \varphi) \times$$

$$\times \sin^{m-3}\theta_2 \cdots \sin\theta_{m-2}\, d\theta_2 \cdots d\theta_{m-2}\, d\varphi.$$

Поскольку результат усреднения любой сферической функции $Y_k^{(m-1)}$, $k \geqslant 1$, по поверхности единичной сферы $m-1$-мерного пространства равен нулю, то в соответствии с формулами (1), (2)

$$Q_n(r, \theta_1) = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k C_k^{\left(\frac{m-2}{2}\right)}(\cos\theta_1).$$

Из этих же соотношений вытекает равенство

$$P_n(r, 0, \ldots) = Q_n(r, 0), \tag{11}$$

справедливое для любого r.

Заметим также, что в силу условия (8)

$$\max_{0 \leq \theta \leq \pi} |Q_n(1, \theta)| \leq M. \tag{12}$$

Согласно (4) полином $Q_n(r, \theta_1)$ можно представить в виде

$$Q_n(r, \theta_1) = \sum_{k=0}^{n} a_k^1 T_k^{(m)}(r, \theta_1).$$

Учитывая (11), нашу задачу можно сформулировать теперь так: оценить

$$|P_n(R, 0, \ldots)| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k^1 T_k^{(m)}(R, 0)\right|,$$

если известно, что

$$Q_n(1, \theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k' \cos k\theta$$

подчиняется условию (12).

В соответствии с леммой 2 последовательность $\{T_k^{(m)}(R, 0)\}_k$ удовлетворяет условиям леммы 1, если

$$m = 2l, \quad R \geq 1.$$

Применяя лемму 1, имеем

$$|P_n(R, 0, \ldots)| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k^1 T_k^{(m)}(R, 0)\right| \leq M T_n^{(m)}(R, 0). \tag{13}$$

Используя последнее утверждение леммы 1, нетрудно далее установить, что для обращения (13) в равенство необходимо и достаточно, чтобы

$$P_n(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m-2}, \varphi) = T_n^{(m)}(r, \theta_1).$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Пусть $N_n^{(m)}(R, \theta_1, \ldots, \theta_{m-2}, \varphi, \rho) = \frac{1}{M} \sup |P_n(r, \theta_1, \ldots \theta_{m-2}, \varphi)|$, $R \geq \rho$, где верхняя грань берется по всевозможным гармоническим полиномам m переменных степени не выше, чем n, удовлетворяющим условию (8). Очевидно, что $N_n^{(m)}(R, \theta_1, \ldots, \varphi; \rho) = N_n^{(m)}\left(\frac{R}{\rho}\right)$, где $N_n^{(m)}(r) = N_n^{(m)}(r, 0, \ldots, 0; 1)$ функцию дискретного переменного n $N_n^{(m)}(r)$ естественно называть характеристикой роста гармонических полиномов m переменных. Согласно теореме при $m=2l$, $l=1, 2, \ldots$, характеристика роста

$$N_n^{(m)}(r)=T_n^{(m)}(r,\ 0).$$

Для вычисления характеристики роста гармонических полиномов четного числа переменных можно воспользоваться соотношениями (6), (7). Отсюда находим

$$N_n^{(2)}=r^n,\qquad n\geqslant 0$$

$$N_n^{(4)}=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2}r^n-\dfrac{n-1}{2}r^{n-2}, & n\geqslant 1\\ 1, & n=0\end{cases}$$

$$N_n^{(6)}=\begin{cases}\dfrac{(n+3)(n+2)}{12}r^n-\dfrac{n^2}{6}r^{n-2}+\dfrac{(n-3)(n-2)}{12}r^{n-4}, & n\geqslant 2\\ r, & n=1\\ 1, & n=0\end{cases}\tag{14}$$

и т. д.

С помощью соотношения (6) легко убедиться, что при больших R и $n\geqslant l-1$.

$$N_n^{(2l)}(R)\simeq\frac{(n+2l-3)(n+2l-4)\cdots(n+l-1)}{2^{l-1}(2l-3)!!}R^n.$$

Замечание 2. С. Н. Бернштейн [2] показал, что характеристикой роста алгебраических полиномов произвольного числа переменных, ограниченных в шаре соответствующей размерности, является $T_n(r)$, $r>1$, где через $T_n(x)$ обозначен полином Чебышева 1-го рода степени n. Таким образом, характеристика роста в классе всех алгебраических многочленов степени n не зависит от размерности пространства. Что касается характеристики роста гармонических полиномов $N_n^{(m)}(r)$, то она, как мы видели, существенно зависит от размерности пространства m.

Очевидно,

$$N_n^{(m)}(r)\leqslant T_n(r).$$

Легко усмотреть, что

$$N_n^{(m)}(r)<N_n^{(m+1)}(r).$$

Пусть

$$N_n^{(\infty)}(r)=\lim_{m\to\infty}N_n^{(m)}(r).$$

Используя соотношение (6), нетрудно показать, что

$$N_n^{(\infty)}(r)=T_n(r).$$

Поэтому $T_n(r)$ является наилучшей мажорантой для $N_n^{(m)}(r)$, независящей от m.

Замечание 3. Доказанная в заметке теорема, видимо, верна для произвольного m. Однако при $m=2l+1$ указанная здесь схема доказательства не приводит к цели, так как в этом случае лемма 2 перестает быть верной.

Է. Գ. ԳՈԼՇՏԵՅՆ

Հարմոնիկ բազմանդամների համար մի էքստրեմալ խնդրի մասին

Հոդվածի նպատակն է ստանալ համապատասխան չափանի սֆերայի վրա մոդուլով սահմանափակ զույգ թվով փոփոխականների հարմոնիկ բազմանդամների ճշգրիտ աճի գնահատականը:

Հիմնական արդյունքը կարելի է ձևակերպել այսպես.

Թեորեմ. *Ենթադրենք, որ* $P_n(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{m-2}, \varphi)$*-ն* m — *փոփոխականների և* n*-ից ոչ բարձր աստիճանի հարմոնիկ բազմանդամ է, որը բավարարում է*

$$\max_{r<\rho} |P_n(r, \theta_1, \dots, \theta_{m-2}, \varphi)| = M$$

պայմանին,

եթե $m=2l$, $l=1, 2, \dots$, *ապա ցանկացած* $R>\rho$ *դեպքում*

$$|P_n(R, \bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_{m-2}, \bar{\varphi}| < M \cdot T_n^{(m)}\left(\frac{R}{\rho}, 0\right):$$

Վերջին գնահատականը ճշգրիտ է, ընդ որում միակ հարմոնիկ բազմանդամը, որի համար նա դառնում է հավասարություն, հետևյալն է՝

$$M \cdot T_n^{(m)}\left(\frac{r}{\rho}, \gamma\right),$$

որտեղ γ*-ն* $(R, \bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_{m-2}, \bar{\varphi})$ *և* $(r, \theta_1, \dots, \theta_{m-2}, \varphi)$ *կետերի շառավիղ վեկտորների միջև ընկած անկյունն է, իսկ* $T_n^{(m)}(r, \theta)$*-ն,* m *- չափանի տարածության միավոր սֆերայի վրա* $\cos k\theta$ *ֆունկցիայի հետ համընկնող, հարմոնիկ բազմանդամն է:*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Erdelyi*, Magnus; Higher transcendental functions, v. 2. New York, 1953, p.p. 237—240. [2] *С. Н. Бернштейн*, ДАН СССР. 59 (1948), стр. 833—836.