ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
XXXI 1960 3

МАТЕМАТИКА

А. В. Чакмазян

О полярно-двойственно нормализованных поверхностях пространства K_n

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 9. V 1960)

Вопрос о полярной нормализации поверхности X_m выдвинут и разработан А. П. Норденом. Как известно из теории внешней полярной нормализации ([1]), внутренняя геометрия любой поверхности совпадает с внутренней геометрией в смысле Гаусса, а нормали 1-го и 2-го рода считаются полярно сопряженными относительно абсолюта. Иначе говоря, нормаль 1-го рода вполне ортогональна касательной плоскости X_m.

Рассмотрим гиперполосу Γ_m ([2]) в K_n, то есть в проективном пространстве с заданным абсолютом Q_{n-1}. Гиперполоса нормализована, двойственна, если она нормализована в смысле А. П. Нордена ([1]), причем ее нормаль 1-го рода содержит характеристику семейства главных гиперплоскостей ([2]).

Для того чтобы эта нормализация была двойственно полярной относительно абсолюта Q_{n-1}, необходимо и достаточно, чтобы P_{n-m} и P_{m-1} были полярно сопряженными относительно абсолюта.

Рассмотрим внешнюю нормализацию и пусть точки гиперполосы определяются вектором $\quad x = x(u^1, \cdots, u^m), \qquad (1)$

который мы будем предполагать нормированным по Вейерштрасу, т. е. $x^2 = \varepsilon = \pm 1$.

Обозначим через X нормированный вектор касательной гиперполости гиперполосы, а через $\underset{s}{X}$ $(s = 1, 2, \cdots n - m - 1)$ векторы точек характеристической плоскости, расположенные на поляре точки x.

Точки x, X, $\underset{s}{X}$ определяют P_{n-m}, а точки y_i определяют P_{m-1}. Так как вектор $\underset{s}{X}$ определяют $(n - m - 1)$ — направлений характеристической плоскости, проходящей через x, то они удовлетворяют условиям

$$X \underset{s}{X} = 0, \quad d_i X \underset{s}{X} = 0. \qquad (2)$$

Для того, чтобы гиперполоса Γ_m допускала двойственную полярную нормализацию, необходимо выполнение условия (2).

ԱԿԱԴԵՄԻԱ

В силу определения двойственной полярной нормализации мы получаем таблицу скалярных произведений.

	X	y_i	X	$\underset{s}{X}$
X	ε	0	0	0
y_i	0	g_{ij}	0	0
X	0	0	ε_1	0
$\underset{t}{X}$	0	0	0	g_{st}

Теперь запишем основные уравнения двойственно полярно нормализованной

$$\partial_i\, x = y_i + l_i\, x,$$

$$\nabla_j\, y_i = l_j\, y_i + b_{ij}\, x + h_{ji}\, X + \overset{s}{h}_{ji}\, \underset{s}{X}, \tag{3}$$

$$\nabla_j \underset{s}{X} = \underset{s}{m}{}^{k}_{j}\, y_k + \underset{s}{m}_j\, x + \underset{s}{n}_i\, X + \overset{t}{\underset{s}{n}}_j\, \underset{t}{X},$$

$$\nabla_j X = m^{k}_{j}\, y_k + m_j\, x + n_j\, X + \overset{t}{n}_j\, \underset{t}{X}.$$

Пользуясь уравнениями (3) и таблицей, получаем из (2), что

$$\underset{s}{n}_j = 0, \quad \overset{s}{n}_j = 0. \tag{4}$$

Если мы выпишем все скалярные произведения таблицы и продифференцируем каждое из них, употребляя, если это нужно, ковариатное дифференцирование и принимая во внимание уравнения (3) и условия (4), то получим следующий ряд равенств:

$$1)\ l_i = 0, \quad 2)\ g_{ji} + p_{ji}\,\varepsilon = 0, \quad 3)\ m_j = 0, \quad 4)\ \underset{s}{m}_j = 0,$$

$$5)\ \nabla_k g_{ji} = 0, \quad 6)\ m^{k}_{j}\, g_{kj} + h_{ji}\,\varepsilon_1 = 0, \quad 7)\ m^{k}_{j}\, g_{ki} + \overset{t}{h}_{ji}\, g_{st} = 0,$$

$$8)\ n_j = 0, \quad 9)\ \overset{\delta}{\underset{s}{n}}_i\, g_{\delta t} + \overset{r}{\underset{t}{n}}_i\, g_{sz} = 0.$$

В силу этих равенств основные уравнения принимают следующий вид

$$\Delta_j x_i = -\varepsilon g_{ji}\, x + h_{ji}\, X + \overset{s}{h}_{ji}\, \underset{s}{X} \ \text{(A)};$$

$$\nabla_j \underset{s}{X} = \underset{s}{m}{}^{k}_{j}\, x_k + \underset{s}{n}_j\, \underset{t}{X} \quad \text{(B)}; \qquad X_j = m^{k}_{j}\, x_n \quad \text{(C)}, \tag{5}$$

и дополнительно следующие отношения

$$\text{I. } \nabla_k g_{ij} = 0; \quad \text{II. } m^{k}_{j}\, g_{kj} + \varepsilon_1\, h_{ji} = 0; \quad \text{III. } \underset{s}{h}_{ji} + \underset{s}{n}_{i\,j}\, g_{ki} = 0;$$

$$\text{IV. } \underset{st}{n}_j + \underset{ts}{n}_i = 0,$$

где считается, что номер внизу под точкой опущен с помощью вели-

чин g_{st}. (I) показывает, что внутренняя связность двойственно поляр-но нормализированной X_m—метрическая.

Эта связность будет риманова, если $g = \mathrm{Det}\|g_{ij}\| \neq 0$.

Если составим условия интегрируемости системы основных уравнений (5), то получим следующие соотношения

$$\left.\begin{array}{ll} R_{kji.}^{\cdot\cdot\cdot e} = 2\varepsilon\delta_{[k}^{e} g_{j]i} - 2\overset{s}{h}_{i[j}\, m_{k]}^{e} - 2h_{i[j}\, m_{k]}^{e} & \text{(I)} \\ \nabla_{[k}\, h_{j]i} = 0 & \text{(II)} \\ \nabla_{[k}\, \overset{s}{h}_{j]i} + \overset{t}{h}_{i[j}\, \overset{s}{n}_{k]} = 0 & \text{(III)} \end{array}\right\} \text{(A}'\text{)}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \nabla_{[k}\, \underset{s}{m}_{j]}^{e} + \underset{s}{\overset{t}{n}}_{[j}\, \underset{t}{m}_{k]}^{e} = 0 & \text{(I)} \\ \underset{s}{\dot{h}}_{[kj]} = 0 & \text{(II)} \\ \nabla_{[k}\, \underset{s}{\overset{t}{n}}_{j]} + \underset{s}{m}_{[j}^{e}\, \overset{t}{h}_{k]e} + \underset{s}{\overset{r}{n}}_{[j}\, \underset{r}{\overset{t}{n}}_{k]} = 0 & \text{(III)} \end{array}\right\} \text{(B}'\text{)} \qquad (6)$$

$$m_{[j}^{e}\, \overset{t}{h}_{k]i} = 0, \qquad \text{(I)} \qquad \text{(C}'\text{)}$$

где $R_{kji.}^{\cdot\cdot\cdot e}$ есть тензор кривизны внутренней геометрии X_m.

Мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема. Гиперполоса Γ_m, находящаяся во внешней двойственно полярной нормализации относительно абсолюта Q_{n-1}, определяется с точностью до проективного преобразования заданием основного тензора своей внутренней римановой связности, а также тензоров h_{ij}, $\overset{s}{h}_{ij}$, $\underset{t}{\overset{s}{n}}_{i}$, удовлетворяющих условиям (6).

В заключение рассмотрим случай, когда X_2 вложена в четырехмерное эллиптическое пространство. Тогда (5) принимает следующий вид

$$\nabla_j x_i = -g_{ij}\, x + h_{ij}\, X + k_{ij}\, Y; \qquad X_i = -h_j^k x^k; \qquad Y_j = -k_j^k x_k, \qquad (7)$$

где $h_{ij} = -\partial_i x\, \partial_j X = X \nabla_j x_i$, $\quad k_{ij} = -\partial_i x\, \partial_j Y = Y \nabla_j x_i$.

Из системы (7) можно определить векторные функции x, X и Y, если задан метрической тензор g_{ij} поверхности тензора h_{ij}, k_{ij}, удовлетворяющие следующим условиям интегрируемости.

I. $R_{kji.}^{\cdot\cdot\cdot e} = 2g_{i[j}\, \delta_{k]}^{e} + 2h_{i[j}\, h_{k]}^{e} + 2k_{i[j}\, k_{k]}^{e}$;

II. $\nabla_{[k}\, h_{j]i} = 0$;

III. $\nabla_{[k}\, k_{j]i} = 0$;

IV. $k_{[i}^{m}\, h_{j]m} = 0$.

Условие (IV) показывает, что главные направления тензоров h_{ij}, k_{ij} совпадают. Таким образом, сеть $h_{ij}\, du^i\, du^j = 0$, $k_{ij}\, du^i\, du_j = 0$ имеет общую биссекторную сеть, которую мы назовем главной сетью X_2. Примем теперь главную сеть за координатную, т. е. положим $h_{12} = k_{12} = g_{12} = 0$. Из основных уравнений получаем

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^1 \partial u^2} = \Gamma^1_{12} \frac{\partial x}{\partial u^2} + \Gamma^2_{21} \frac{\partial x}{\partial u^2}.$$

Таким образом, на X_2, вложенной в четырехмерное эллиптическое пространство, можно найти такую главную сеть, приняв которую за координату, мы получим, что радиус—вектор x будет удовлетворять уравнение Лапласа.

В частности, примем, что эта сеть Чебышевская. Для этого необходимо и достаточно выполнение равенства $\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{12} = 0$ ([1], стр. 337).

В этом случае получаем, что поверхность X_2 имеет нулевую кривизну.

Бианки доказал ([3]), что всякая поверхность нулевой кривизны эллиптического пространства есть поверхность сдвига.

Таким образом, можем утверждать, что поверхность сдвига эллиптического пространства допускает двойственно полярную нормализацию.

Ереванский государственный университет.

Ա. Վ. ՉԱՔՄԱԶՅԱՆ

K_n Տարածության բեվեռային երկակի նորմալացված մակերևույթների մասին

Դիտարկենք Γ_m հիպերշերտը տված Q_{n-1} աբսոլյուտով պրոեկտիվ տարածության մեջ։ Հիպերշերտը նորմալացված է երկակի, եթե նա նորմալացված է Ա. Պ. Նորդենի իմաստով (1), ըստ որի նրա առաջին սեռի նորմալը պարունակում է գլխավոր հիպերհարթությունների ընտանիքի խարակտերիստիկը (2)։ Նորմալացումը այս Q_{n-1} աբսոլյուտի նկատմամբ բևեռային երկակի լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանը P_{n-m} և P_{m-1} սեռի նորմալների բևեռային համալուծ լինելն է աբսոլյուտի նկատմամբ։

Ուսումնասիրության արդյունքով պարզվել է հետևյալը՝

Որպեսզի X_m մակերևույթը թույլատրի բևեռային երկակի նորմալացում Q_{n-1} աբսոլյուտի նկատմամբ, անհրաժեշտ է որ տեղի ունենա (2) պայմանը։

Բևեռային երկակի նորմալացում թույլատրող հիպերշերտը որոշվում է պրոեկտիվ ձևափոխության ճշտությամբ, եթե տված են իրեն ներքին Ռիմանի կապակցությունը և h_{ij}, $\overset{s}{h}_{ij}$ $\underset{i}{\overset{s}{n}}$ տենզորները, որոնք բավարարում են (6) պայմանին։ Սահքի մակերևույթը չորս չափանի էլիպսական տարածության թույլատրում է բևեռային երկակի նորմալացումը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. П. Норден*, Пространство аффинной связности, Гостехиздат, 1950. [2] *А. В. Чакмазян*, ДАН АрмССР, т. XXXVIII, № 4 (1959). [3] *L. Bianchi*, Lezioni di deometria differenziale, t. II, p. 2. 1924.