ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXXI 1960 2

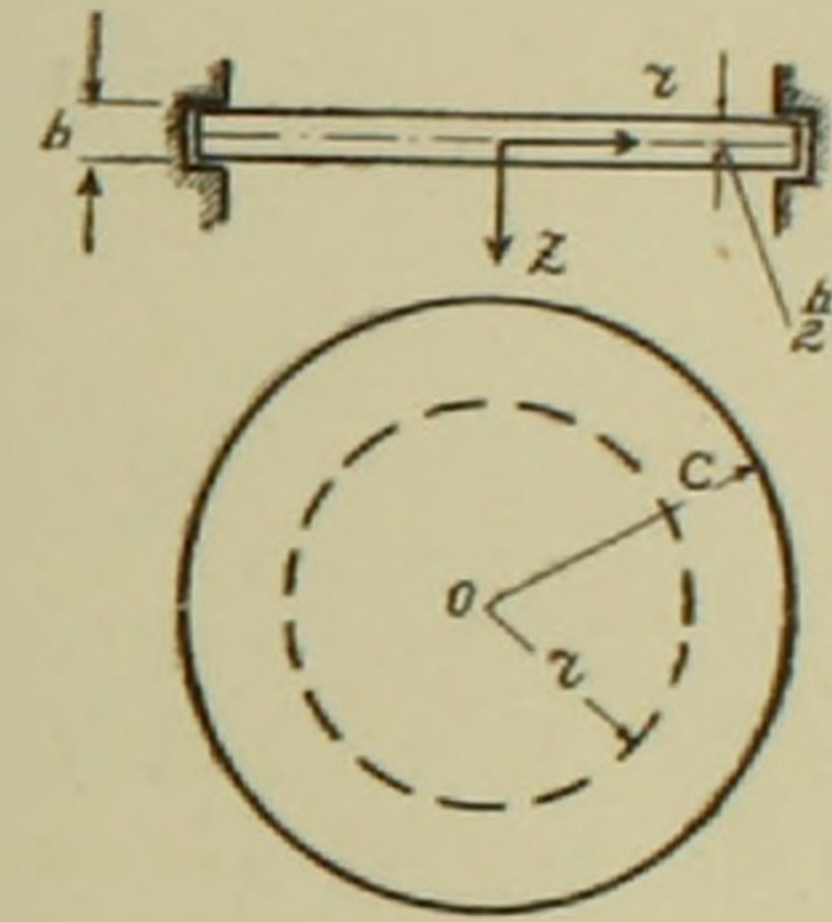
ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Д. В. Пештмалджян

К нелинейной теории круглой пластинки

(Представлено чл.-корресп. АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 13. IV 1960)

Рассмотрим осесимметричный изгиб ортотропной круглой пластинки при конечных прогибах. Плоскости упругой симметрии материала пластинки взаимно перпендикулярны, при этом одна из плоскостей упругой симметрии в каждой точке параллельна срединной—координатной плоскости, а остальные две—перпендикулярны координатным линиям r=const, φ=const, к которым отнесена срединная плоскость. Ось z совместим с осью пластинки (фиг. 1). Пусть на пластинку действует поперечное давление с интенсивностью $q(r)$.



Фиг. 1

Считаем, что деформации и углы поворотов малы по сравнению с единицей и прогиб не меняется по толщине пластинки ([1]).

Как и в работе С. А. Амбарцумяна ([2]), предполагаем, что

1) при определении деформаций e_{rr} и $e_{\varphi\varphi}$ влиянием нормальных напряжений σ_{zz} можно пренебречь;

2) касательное напряжение τ_{rz} представляется в виде:

$$\tau_{rz} = f(z)\varphi(r), \tag{1}$$

где $\varphi(r)$—искомая функция; $f(z)$—функция, характеризующая закон изменения напряжения τ_{rz} по толщине пластинки, причем $f\left(\pm\frac{h}{2}\right) = 0$.

Как указывается в работе ([3]), предложенная теория учитывает главную часть поправки к классической теории.

В силу допущений о малости деформаций и неизменяемости прогиба при толщине пластинки, для компонентов деформаций имеем:

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2, \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad e_{zz} = 0$$

$$e_{rz} = \frac{dw}{dr} + \frac{\partial u_r}{\partial z}. \tag{2}$$

Подставив значение e_{rz}, найденное из закона Гука, с помощью (1), в последнее соотношение (2), для радиального перемещения u_r получим:

$$u_r = u - z\frac{dw}{dr} + I_0\Phi, \tag{3}$$

где $I_0 = \int\limits_0^z f(z)\,dz$, $\Phi(r) = a_{55}\varphi(r)$, $u(r)$ и $w(r)$—радиальная и осевая компоненты перемещений срединной плоскости.

Представив компоненты деформаций (2) через перемещения срединной плоскости, из обобщенного закона Гука для напряжений σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= B_{11}\left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2 - z\frac{d^2w}{dr^2} + I_0\frac{d\Phi}{dr}\right] + \\ &+ B_{12}\left[\frac{u}{r} - \frac{z}{r}\frac{dw}{dr} + I_0\frac{\Phi}{r}\right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= B_{22}\left[\frac{u}{r} - \frac{z}{r}\frac{dw}{dr} + I_0\frac{\Phi}{r}\right] + \\ &+ B_{12}\left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2 - z\frac{d^2w}{dr^2} + I_0\frac{d\Phi}{dr}\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Далее для изгибающих моментов M_r, M_φ и перерезывающей силы Q получим:

$$\begin{aligned} M_r &= -D_{11}\frac{d^2w}{dr^2} - D_{12}\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + B_{11}I_3\frac{d\Phi}{dr} + B_{12}I_3\frac{\Phi}{r}, \\ M_\varphi &= -D_{12}\frac{d^2w}{dr^2} - D_{22}\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + B_{12}I_3\frac{d\Phi}{dr} + B_{22}I_3\frac{\Phi}{r}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$Q = \frac{1}{a_{55}}I_5\Phi,$$

где

$$_3 = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} I_0(z)\,z\,dz, \quad I_5 = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} f(z)\,dz.$$

Внутренние усилия и моменты удовлетворяют следующим уравнениям равновесия ([1]):

$$\frac{d}{dr}(rT_r) - T_\varphi = 0,$$

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r}{r} - \frac{M_\varphi}{r} = -Q, \qquad (6, а, б, в)$$

$$Q = \frac{1}{r}\int_0^r qr dr + T_r \frac{dw}{dr},$$

а также уравнению неразрывности деформаций

$$\frac{1+\mu_2}{E_2} T_\varphi - \frac{1+\mu_1}{E_1} T_r + \frac{1}{E_2} r \frac{dT_\varphi}{dr} - \frac{\mu_2}{E_2} r \frac{dT_r}{dr} = -\frac{h}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2. \qquad (7)$$

Первому уравнению равновесия удовлетворим тождественно, представляя усилия T_r и T_φ через функцию напряжений $\eta(r)$ следующим образом:

$$T_r = \frac{h}{r}\frac{d\eta}{dr}, \quad T_\varphi = h\frac{d^2\eta}{dr^2}. \qquad (8)$$

Из третьего уравнения равновесия для искомой функции $\Phi(r)$ получим:

$$\Phi(r) = \frac{a_{55}}{I_5}\frac{1}{r}\int_0^r qr dr + \frac{a_{55}}{I_5}\frac{h}{r}\frac{dw}{dr}\frac{d\eta}{dr}. \qquad (9)$$

Далее, выражая все величины в уравнениях (6 б) и (7) через функции $w(r)$ и $\eta(r)$, получим основную систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$D_{11} r \frac{d^3w}{dr^3} + D_{11}\frac{d^2w}{dr^2} - D_{22}\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + B_{11}a_{55}\frac{I_3}{I_5}h\left(\frac{1}{r}\frac{d^2\eta}{dr^2}\frac{dw}{dr} + \right.$$

$$+\frac{1}{r}\frac{d\eta}{dr}\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{d\eta}{dr}\frac{dw}{dr} - \frac{d^3\eta}{dr^3}\frac{dw}{dr} - \frac{d\eta}{dr}\frac{d^3w}{dr^3} -$$

$$\left. -2\frac{d^2\eta}{dr^2}\frac{d^2w}{dr^2}\right) + a_{55}B_{22}\frac{I_3}{I_5}h\frac{1}{r^2}\frac{d\eta}{dr}\frac{dw}{dr} - h\frac{dw}{dr}\frac{d\eta}{dr} =$$

$$= \int rq dr - \frac{a_{55}I_3(B_{11}-B_{22})}{I_5}\frac{1}{r_2}\int rq dr - \frac{B_{11}I_3 a_{55}}{I_5} r\frac{dq}{dr}, \qquad (10)$$

$$\frac{1}{E_2} r \frac{d^3\eta}{dr^3} + \frac{1}{E_2}\frac{d_2\eta}{dr^2} - \frac{1}{E_1}\frac{1}{r}\frac{d\eta}{dr} = -\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2.$$

Как частный случай, рассмотрим изгиб круглой пластинки из трансверсально-изотропного материала ($E_1 = E_2 = E$, $a_{55} = \frac{1}{G'}$, $\mu_1 =$

$\mu_2 = \mu$) под равномерно распределенной нагрузкой $q = \text{const}$. Следуя ([2]), примем, что касательное напряжение распределено по толщине пластинки по закону параболы, т. е.

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right). \tag{11}$$

В этом случае система (10), приведенная к безразмерным параметрам, примет вид:

$$\begin{gathered} w_*''' + \frac{w_*''}{\rho} - \frac{w_*'}{\rho^2} + 1{,}2k\left\{\frac{1}{\rho^2}F'w_*' + \frac{1}{\rho^2}F'w_*'' - \frac{1}{\rho}F''w_*' - \right. \\ \left. - \frac{1}{\rho}F'w_*''' - \frac{2}{\rho}F''w_*''\right\} - 12(1-\mu^2)\frac{1}{\rho}F'w_*' = \rho q^*, \\ F''' + \frac{F''}{\rho} - \frac{F'}{\rho^2} = -\frac{1}{2\rho}(w_*')^2, \end{gathered} \tag{12}$$

где

$$F = \frac{\eta}{Eh^2},\ w_* = \frac{w}{h},\quad q^* = \frac{qc^4}{2Dh},\quad \rho = \frac{r}{c},\ k = \frac{Eh^2}{G'c^2}.$$

Систему (12) решаем методом возмущения ([4]). В качестве параметра возмущения возьмем максимальное значение прогиба $\zeta = w_*(0)$. Искомые функции и нагрузку представим в виде рядов ([1]):

$$\begin{aligned} w_* &= w_{*,1}(\rho)\zeta + w_{*,3}(\rho)\zeta^3 + \cdots \\ F &= F_2(\rho)\zeta^2 + F_4(\rho)\zeta^4 + \cdots \\ q^* &= \alpha_1\zeta + \alpha_3\zeta^3 + \cdots \end{aligned} \tag{13}$$

Пусть пластинка заделана по контуру, т. е.

$$\begin{gathered} w_* = w_*' = 0,\ u = 0 \text{ при } \rho = 1 \\ w_*' \text{ и } T_r \text{ конечны при } \rho = 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Тогда для коэффициентов разложений будем иметь:

$$\begin{gathered} w_{*,1} = (1-\rho)^2, \\ w_{*,3} = \frac{1-\mu^2}{360}\rho^2\left[\frac{4(29-19\mu)}{1-\mu} - \frac{277-197\mu}{1-\mu}\rho^2 + \right. \\ \left. + \frac{20(11-9\mu)}{1-\mu}\rho^4 - 75\rho^6 + 18\rho^8 - 2\rho^{10}\right] + \\ + \rho^2 k\left[-\frac{43}{75} + \frac{223}{150}\rho^2 - \frac{4}{3}\rho^4 + \frac{1}{2}\rho^6 - \frac{2}{25}\rho^8\right], \\ F_2 = C_0 + \frac{5-3\mu}{3(1-\mu)}\frac{\rho^2}{4} - \frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^6}{9} - \frac{\rho^8}{48}, \end{gathered} \tag{15}$$

$$F_4 = C_1 - \frac{1-\mu^2}{360}\rho^2\left[\frac{4(34-74\mu+33\mu^2)}{21(1-\mu)^2} - \frac{29-19\mu}{1-\mu}\rho^2 + \right.$$

$$+\frac{5(67-47\mu)}{9(1-\mu)}\rho^4 - \frac{607-467\mu}{24(1-\mu)}\rho^6 + \frac{6(8-7\mu)}{5(1-\mu)}\rho^8 - \frac{39}{18}\rho^{10} +$$

$$\left. + \frac{17}{49}\rho^{12} - \frac{3}{112}\rho^{14}\right] - \frac{k}{5}\rho^2\left[-\frac{179-297\mu}{1260(1-\mu)} + \frac{43}{60}\rho^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{133}{135}\rho^4 + \frac{523}{720}\rho^6 - \frac{3}{10}\rho^8 + \frac{1}{15}\rho^{10} - \frac{1}{147}\rho^{12}\right].$$

Коэффициенты α_i определяются из условий:

$$w_{*,1} = 1,\ w_{*,k} = 0\ (k > 1)\ \text{при}\ \rho = 0$$

и имеют вид:

$$\alpha_1 = 32$$

$$\alpha_3 = \frac{4(1+\mu)(173-73\mu)}{45} - k\,\frac{16(107-47\mu)}{75(1-\mu)}.$$

Если ограничиться этими приближениями, то соотношение между стрелой прогиба и нагрузкой будет иметь вид:

$$32\zeta + \left[\frac{4(1+\mu)(173-73\mu)}{45} - k\,\frac{16(107-47\mu)}{75(1-\mu)}\right]\zeta^3 = q^*, \tag{16}$$

а для напряжений в срединной поверхности и напряжений изгиба получаем следующие выражения:

в центре пластинки

$$\sigma^*_{r,c}(0,z) = \frac{\sigma_{r,c}a^2}{Eh^2} = \frac{5-3\mu}{6(1-\mu)}\zeta^2 + \left[-\frac{1+\mu}{1-\mu}\,\frac{35-74\mu+33\mu^2}{945} + \right.$$

$$\left. + k\,\frac{179-297\mu}{3150(1-\mu)}\right]\zeta^4,$$

$$\sigma^*_{r,u}\left(0,\frac{h}{2}\right) = \frac{\sigma_{r,u}a^2}{Eh^2} = \frac{1}{2(1-\mu)}\left\{(1-k\sigma^*_{r,c})\left[4\zeta - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left[\frac{(1+\mu)(29-19\mu)}{45} - k\,\frac{86}{75}\right]\zeta^3\right] + \frac{kq^*}{6(1-\mu^2)}\right\},$$

на краю пластинки

$$\sigma^*_{r,c}(1,z) = \frac{\sigma_{r,c}a^2}{Eh^2} = \frac{1}{3(1-\mu)}\zeta^2 + \left[\frac{1+\mu}{1-\mu}\,\frac{20-13\mu}{945} - \right.$$

$$\left. - k\,\frac{59}{1575(1-\mu)}\right]\zeta^4,$$

$$\sigma_{r,u}^{*}\left(1,\ \frac{h}{2}\right)=\frac{\sigma_{r,u}\,a^{2}}{Eh^{2}}=\frac{1}{2(1-\mu^{2})}\left\{\ (\sigma_{r,c}^{*}k-1)\left[8\zeta+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|\frac{(1+\mu)(183-43\mu)}{45}-k\ \frac{188}{75}\right|\zeta^{3}\ \right]+\frac{(1+\mu)\,kq^{*}}{6(1-\mu^{2})}\right\}$$

В частности, при $k=0$ получаем решение задачи при гипотезе Кирхгофа [5].

Значения максимальных прогибов и напряжений при различных значениях нагрузки и коэффициента k приведены в табл. 1. Коэффициент Пуассона в расчетах принят равным $\mu=0{,}3$.

Сравнения значений максимальных прогибов и напряжений при наличии гипотезы Кирхгофа ($k=0$) для приведенной нагрузки $q^{*}=2{,}5$ и 5 (так как в этих случаях закон распределения напряжений устанавливается достаточно точно [1]), показывают следующее:

а) как и в линейной теории, максимальные прогибы, вычисленные при наличии гипотезы Кирхгофа, имеют заниженные значения;

Таблица 1

		$q^{*}=2{,}5$	5	7,5	10
$k=0$	ζ	0.393	0,682	0,893	1,057
	$\sigma_{r,c}^{*}(0,z)$	0,15003	0,44775	0,75995	1,05437
	$\sigma_{r,c}^{*}(1,z)$	0.07427	0,22832	0,39983	0,57149
	$\sigma_{r,u}^{*}\left(0,\frac{h}{2}\right)$	1,09368	1,79608	2.20907	2,45224
	$\sigma_{r,c}^{*}\left(1,\frac{h}{2}\right)$	−1,79501	−3,35074	−4,71762	−5,96013
$k=0{,}2$	ζ	0,405	0,714	0,953	1,144
	$\sigma_{r,c}^{*}(0,z)$	0,15954	0,49223	0,86935	1,24178
	$\sigma_{r,c}^{*}(1,z)$	0,07866	0,24820	0,44975	0.65905
	$\sigma_{r,u}^{*}\left(0,\frac{h}{2}\right)$	1,20174	1,86597	2,21903	2,36172
	$\sigma_{r,u}^{*}\left(1,\frac{h}{2}\right)$	−1,73201	−3,14147	−4,27542	−5,19239
$k=0{,}4$	ζ	0,416	0,777	1,079	1,329
	$\sigma_{r,c}(0,z)$	0,16860	0,58469	1,11924	1,68447
	$\sigma_{r,c}^{*}(1,z)$	0,08274	0,29121	0,56826	0,87299
	$\sigma_{r,u}^{*}\left(0,\frac{h}{2}\right)$	1,22896	1,90740	1,98886	1,64467
	$\sigma_{r,u}^{*}\left(1,\frac{h}{2}\right)$	−1,65680	−2,87397	−3,54883	−3,71367

б) максимальные напряжения в срединной плоскости, вычисленные при наличии гипотезы Кирхгофа, имеют заниженные значения;

в) максимальные изгибные напряжения, вычисленные при наличии гипотезы Кирхгофа, имеют завышенные значения;

г) погрешность гипотезы Кирхгофа при определении максимальных растягивающих и изгибных напряжений больше, чем при определении максимального прогиба. При определении же суммарного максимального напряжения погрешность почти того же порядка, что и при определении максимального прогиба (табл. 2).

Таблица 2

	$k=0{,}2$		$k=0{,}4$	
	$q^*=2{,}5$		2,5	
$\frac{\overset{*}{\zeta}-\overset{*0}{\zeta}}{\overset{*}{\zeta}}\,100\%$	2,96%	4,48%	5,53%	12,23%
$\frac{\overset{*}{\sigma}_{r,c}-\overset{*0}{\sigma}_{r,c}}{\overset{*}{\sigma}_{r,c}}\,100\%$	5,96%	9,04%	11,01%	23,42%
$\frac{\overset{**}{\sigma}_{r,u}-\overset{**}{\sigma}_{r,u}}{\overset{*}{\sigma}_{r,u}}\,100\%$	3,64%	6,66%	8,34%	16,59%
$\frac{\overset{*}{\sigma}_{r}-\overset{*0}{\sigma}_{r}}{\overset{*}{\sigma}_{r}}\,100\%$	3,24%	5,59%	7,46%	13,08%

Здесь величины с нуликами представляют решение при гипотезе Кирхгофа ($k=0$).

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ջ. Վ. ՓԵՇՏՄԱԼՋՅԱՆ

Կլոր սալի ոչ գծային տեսության մասին

Դիտարկված է օրթոտրոպ կլոր սալի առանցքասիմետրիկ ծռումը վերջավոր ճկվածքների դեպքում: Ընդունում ենք, որ դեֆորմացիաները և պտտման անկյունները փոքր են մեկի նկատմամբ (1) և ճկվածքը չի փոփոխվում ըստ սալի հաստության:

Ինչպես Ս. Ա. Համբարձումյանի աշխատանքում (2) ենթադրվում է, որ՝

1) e_{rr} և $e_{\varphi\varphi}$ դեֆորմացիաները որոշելիս կարելի է σ_{zz} նորմալ լարման ազդեցությունը արհամարհել.

2) τ_{rz} շոշափող լարումը ներկայացվում է հետևյալ տեսքով (2).

$$\tau_{rz} = f(z)\,\varphi(r),$$

որտեղ $\varphi(r)$-ը որոնելի ֆունկցիա է, $f(z)$-ը մի ֆունկցիա է, որը բնորոշվում է τ_{rz} լարման փոփոխման օրենքը ըստ սալի հաստության, ընդորում $f\left(\pm\frac{h}{2}\right)=0$:

Ստացված է ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների հիմնական սիստեմ երկու անհայտ ֆունկցիաների՝ $w(r)$ ճկվածքի և $\eta(r)$ լարումների ֆունկցիայի նկատմամբ։

Որպես մասնավոր դեպք դիտված է տրանսվերսալ իզոտրոպ նյութից պատրաստված սալի ծռումը հավասարաչափ բաշխված $q = \text{const}$ բեռի տակ, երբ τ_{rz} շոշափող լարումը ըստ սալի հաստության փոփոխվում է պարաբոլական օրենքով [2]։ Այս դեպքի համար ստացված հավասարումների սիստեմը լուծված է գրգռման մեթոդով [4]։

Գտնված են չորս հաջորդական մոտավորություններ։

Մաքսիմում ճկվածքների և լարումների համեմատությունը Կիրխհոֆի հիպոթեզի առկայության դեպքում ստացված համապատասխան մեծությունների հետ ցույց է տալիս, որ՝

ա) ինչպես և գծային տեսության մեջ, կլասիկ տեսությունով հաշված մաքսիմում ճկվածքները ստացվում են ավելի փոքր.

բ) միջին մակերևույթում առաջացած մաքսիմում լարումները կլասիկ տեսությունով հաշվելիս ստացվում են ավելի փոքր.

գ) ծռող մաքսիմում լարումները կլասիկ տեսությունով հաշվելիս ստացվում են ավելի մեծ.

դ) մաքսիմում ձգող և ծռող լարումները որոշելիս շեղումները ստացվում են ավելի մեծ, քան մաքսիմում ճկվածքների դեպքում։

Իսկ գումար մաքսիմում լարումները որոշելիս այդ շեղումները համարյա նույն կարգի են։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. С. Вольмир*, Гибкие пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1956. [2] *С. А. Амбарцумян*, К теории изгиба анизотропных пластинок, „Известия АН СССР, ОТН, № 5, 1958. [3] *Х. М. Муштари, Г. Г. Терегулов*, Теория пологих ортотропных оболочек средней толщины, „Известия АН СССР," ОТН (мех. и маш.), № 6, 1959. [4] *П. Я. Полубаринова-Кочина*, К вопросу об устойчивости пластинки, ПММ, 3, № 1, 1936. [5] *Цянь Вэй-чан*, Большие прогибы круглой защемленной пластинки. J. of Phys. 7, № 2, 1947.