ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXI 1960 1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

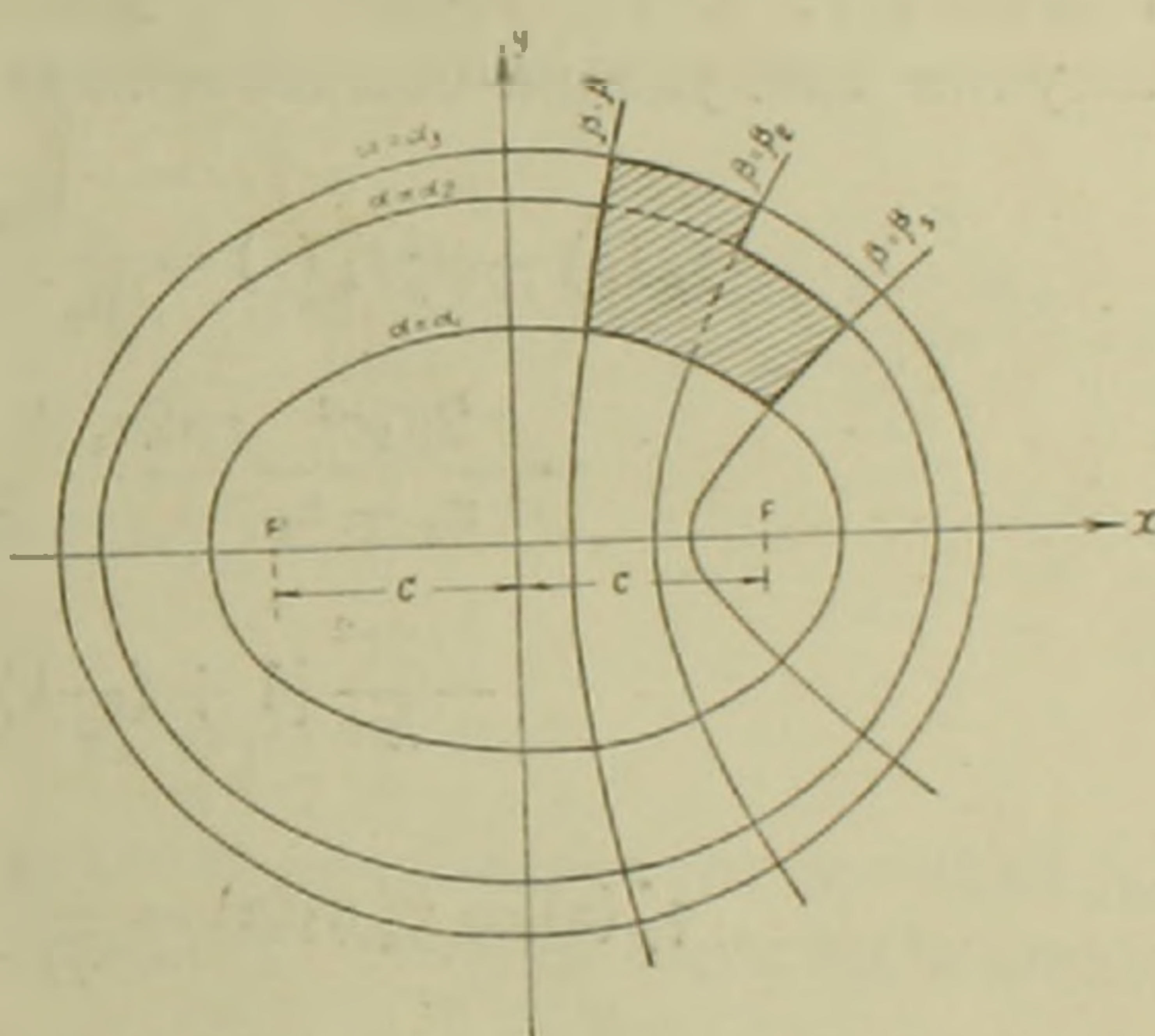
Б. Л. Абрамян

Кручение призматических стержней с поперечным сечением в виде криволинейного уголка

(Представлено чл.-корресп. АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 8. III 1960)

В статье рассматривается кручение призматического стержня с поперечным сечением в виде криволинейного уголка (фиг. 1), образованного координатными линиями в эллиптических координатах. Аналогичная задача для прямолинейного уголка решена в работе ([3]).

Эллиптические координаты использованы в работе А. Соколова ([1]), который еще до Гринхилля ([2]) решил задачу о кручении стержня с сечением, образованным двумя конфокальными эллипсами.



Фиг. 1.

В эллиптических координатах α, β, связанных с декартовыми прямоугольными координатами x и y соотношениями

$$
\begin{aligned}
x &= c\,\mathrm{ch}\alpha \sin\beta \\
y &= c\,\mathrm{sh}\alpha \cos\beta,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $2c$—межфокусное расстояние, функция напряжений при кручении $U(\alpha, \beta)$ в области поперечного сечения стержня удовлетворяет уравнению

$$
\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} = -c^2 (\mathrm{ch} 2\alpha + \cos 2\beta), \tag{2}
$$

а на контуре области сечения обращается в нуль.

Решение задачи ищем в виде ([5])

$$
U(\alpha, \beta) = \begin{cases} U_1(\alpha, \beta) & \alpha \leqslant \alpha_2 \\ U_2(\alpha, \beta) & \beta \leqslant \beta_2. \end{cases} \tag{3}
$$

Функции U_1 и U_2 удовлетворяют уравнению (2) и следующим контурным условиям и условиям сопряжения*

* На возможность решения задачи в такой постановке указал мне академик АН АрмССР М. М. Джрбашян.

$$U_1(\alpha, \beta_3) = U_1(\alpha_1, \beta) = U_1(\alpha, \beta_1) = 0 \tag{4}$$

$$U_1(\alpha_2, \beta) = \begin{cases} 0 & \beta \geqslant \beta_2 \\ U_2(\alpha_2, \beta) & \beta \leqslant \beta_2 \end{cases} \tag{5}$$

$$U_2(\alpha_1, \beta) = U_2(\alpha, \beta_1) = U_2(\alpha_3, \beta) = 0 \tag{6}$$

$$U_2(\alpha, \beta_2) = \begin{cases} 0 & \alpha \geqslant \alpha_2 \\ U_1(\alpha, \beta_2) & \alpha \leqslant \alpha_2 \end{cases} \tag{7}$$

Представляя функции U_1 и U_2 в виде

$$U_1(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\beta) \sin\mu_k(\alpha - \alpha_1) \qquad \mu_k = \frac{k\pi}{\alpha_2 - \alpha_1} \tag{8}$$

$$U_2(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\alpha) \sin\gamma_k(\beta - \beta_1) \qquad \gamma_k = \frac{k\pi}{\beta_2 - \beta_1} \tag{9}$$

и следуя Г. А. Гринбергу ([1]), для определения функций $f_k(\beta)$ и $\varphi_k(\alpha)$ получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения

$$f_k''(\beta) - \mu_k^2 f_k(\beta) = \frac{2\mu_k}{\alpha_2 - \alpha_1}(-1)^k U_1(\alpha_2, \beta) -$$

$$- \frac{2\mu_k c^2}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{\mathrm{ch}2\alpha_1 + (-1)^{k+1}\mathrm{ch}2\alpha_2}{4 + \mu_k^2} -$$

$$- \frac{2c^2}{k\pi}[1 + (-1)^{k+1}]\cos 2\beta, \tag{10}$$

$$\varphi_k''(\alpha) - \gamma_k^2 \varphi_k(\alpha) = \frac{2\gamma_k}{\beta_2 - \beta_1}(-1)^k U_2(\alpha, \beta_2) +$$

$$+ \frac{2\gamma_k c^2}{\beta_2 - \beta_1} \frac{\cos 2\beta_1 + (-1)^{k+1}\cos 2\beta_2}{4 - \gamma_k^2} - \frac{2c^2}{k\pi}[1 + (-1)^{k+1}]\,\mathrm{ch}2\alpha. \tag{11}$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$f_k(\beta) = \begin{cases} f_k^{(1)}(\beta) & \beta \geqslant \beta_2 \\ f_k^{(2)}(\beta) & \beta \leqslant \beta_2 \end{cases} \tag{12}$$

$$\varphi_k(\alpha) = \begin{cases} \varphi_k^{(1)}(\alpha) & \alpha \geqslant \alpha_2 \\ \varphi_k^{(2)}(\alpha) & \alpha \leqslant \alpha_2 \end{cases}, \tag{13}$$

где

$$f_k^{(1)}(\beta) = A_k^{(1)}\mathrm{sh}\mu_k\beta + B_k^{(1)}\mathrm{ch}\mu_k\beta +$$

$$+ \frac{2c^2}{k\pi(4 + \mu_k^2)}\{[\mathrm{ch}\,2\alpha_1 + (-1)^{k+1}\mathrm{ch}2\alpha_2] + [1 + (-1)^{k+1}]\cos 2\beta\}, \tag{14}$$

$$f_k^{(2)}(\beta) = A_k^{(2)} \operatorname{sh} \mu_k \beta + B_k^{(2)} \operatorname{ch} \mu_k \beta + \frac{2c^2}{k\pi (4 + \mu_k^2)} \{ [\operatorname{ch} 2\alpha_1 +$$

$$+ (-1)^{k+1} \operatorname{ch} 2\alpha_2] + [1 + (-1)^{k+1}] \cos 2\beta \} +$$

$$+ \frac{2\mu_k}{\alpha_2 - \alpha_1} (-1)^{k+1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_p(\alpha_2) \sin \gamma_p (\beta - \beta_1)}{\gamma_p^2 + \mu_k^2}, \tag{15}$$

$$\varphi_k^{(1)}(\alpha) = C_k^{(1)} \operatorname{sh} \gamma_k \alpha + D_k^{(1)} \operatorname{ch} \gamma_k \alpha - \frac{2c^2}{k\pi} \frac{\cos 2\beta_1 + (-1)^{k+1} \cos 2\beta_2}{4 - \gamma_k^2} -$$

$$- \frac{2c^2 [1 + (-1)^{k+1}]}{k\pi \gamma_k (4 - \gamma_k^2)} [\gamma_k \operatorname{ch} 2\alpha - 2 \operatorname{sh} 2\alpha_2 \operatorname{sh} \gamma_k (\alpha - \alpha_2) -$$

$$- \gamma_k \operatorname{ch} 2\alpha_2 \operatorname{ch} \gamma_k (\alpha - \alpha_2)] \tag{16}$$

$$\varphi_k^{(2)}(\alpha) = C_k^{(2)} \operatorname{sh} \gamma_k \alpha + D_k^{(2)} \operatorname{ch} \gamma_k \alpha - \frac{2c^2}{k\pi} \frac{\cos 2\beta_1 + (-1)^{k+1} \cos 2\beta_2}{4 - \gamma_k^2} -$$

$$- \frac{2c^2 [1 + (-1)^{k+1}]}{k\pi \gamma_k (4 - \gamma_k^2)} [\gamma_k \operatorname{ch} 2\alpha - 2 \operatorname{sh} 2\alpha_1 \operatorname{sh} \gamma_k (\alpha - \alpha_1) -$$

$$- \gamma_k \operatorname{ch} 2\alpha_1 \operatorname{ch} \gamma_k (\alpha - \alpha_1)] + \frac{2\gamma_k}{\beta_2 - \beta_1} (-1)^{k+1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(\beta_2) \sin \mu_p (\alpha - \alpha_1)}{\mu_p^2 + \gamma_k^2}. \tag{17}$$

Кроме условий

$$\begin{gathered} f_k^{(1)}(\beta_3) = f_k^{(2)}(\beta_1) = 0 \\ \varphi_k^{(1)}(\alpha_3) = \varphi_k^{(2)}(\alpha_1) = 0, \end{gathered} \tag{18}$$

вытекающих из (4) и (6), для обеспечения непрерывности функций $f_k(\beta)$ и $\varphi_k(\alpha)$ в соответствующих интервалах должны быть выполнены и следующие условия:

$$f_k^{(1)}(\beta_2) = f_k^{(2)}(\beta_2), \quad \varphi_k^{(1)}(\alpha_2) = \varphi_k^{(2)}(\alpha_2) \tag{19}$$

$$f_k^{(1)\prime}(\beta_2) = f_k^{(2)\prime}(\beta_2), \quad \varphi_k^{(1)\prime}(\alpha_2) = \varphi_k^{(2)\prime}(\alpha_2). \tag{20}$$

Удовлетворив условиям (18) и (19) и исключая в выражениях (16) и (17) коэффициенты $A_k^{(i)}$, $B_k^{(2)}$, $C_k^{(i)}$ и $D_k^{(2)}$, для функций $f_k^{(i)}(\beta)$ и $\varphi_k^{(i)}(\alpha)$ получим следующие выражения:

$$f_k^{(1)}(\beta) = B_k^{(1)} \frac{\operatorname{sh} \mu_k (\beta_3 - \beta)}{\operatorname{sh} \mu_k \beta_3} + \frac{2c^2}{k\pi} \frac{\operatorname{ch} 2\alpha_1 + (-1)^{k+1} \operatorname{ch} 2\alpha_2}{4 + \mu_k^2} \Big(1 -$$

$$- \frac{\operatorname{sh} \mu_k \beta}{\operatorname{sh} \mu_k \beta_3} \Big) + \frac{2c^2}{k\pi} [1 + (-1)^{k+1}] \frac{\cos 2\beta - \cos 2\beta_3 \operatorname{sh} \mu_k \beta \operatorname{csch} \mu_k \beta_3}{4 + \mu_k^2}. \tag{21}$$

$$f_k^{(2)}(\beta) = B_k^{(1)} \frac{\operatorname{sh} \mu_k (\beta_3 - \beta_2) \operatorname{sh} \mu_k (\beta - \beta_1)}{\operatorname{sh} \mu_k \beta_3 \operatorname{sh} \mu_k (\beta_2 - \beta_1)} + \frac{2c^2}{k\pi} \frac{\operatorname{ch} 2\alpha_1 + (-1)^{k+1} \operatorname{ch} 2\alpha_2}{4 + \mu_k^2} \Big[1 -$$

$$
-\frac{\operatorname{sh}\mu_k(\beta_2-\beta)}{\operatorname{sh}\mu_k(\beta_2-\beta_1)}-\frac{\operatorname{sh}\mu_k\beta_2\operatorname{sh}\mu_k(\beta-\beta_1)}{\operatorname{sh}\mu_k(\beta_2-\beta_1)\operatorname{sh}\mu_k\beta_3}\Bigg]+
$$

$$
+\frac{2c^2}{k\pi}\left[1+(-1)^{k+1}\right]\frac{1}{4+\mu_k^2}\Bigg[\cos 2\beta-\cos 2\beta_1\frac{\operatorname{sh}\mu_k(\beta_2-\beta)}{\operatorname{sh}\mu_k(\beta_2-\beta_1)}-
$$

$$
-\cos 2\beta_3\frac{\operatorname{sh}\mu_k\beta_2\operatorname{sh}\mu_k(\beta-\beta_1)}{\operatorname{sh}\mu_k(\beta_2-\beta_1)\operatorname{sh}\mu_k\beta_3}\Bigg]+
$$

$$
+\frac{2\mu_k}{\alpha_2-\alpha_1}(-1)^{k+1}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\varphi_p(\alpha_2)\sin\gamma_p(\beta-\beta_1)}{\gamma_p^2+\mu_k^2}. \tag{22}
$$

$$
\varphi_k^{(1)}(\alpha)=D_k^{(1)}\frac{\operatorname{sh}\gamma_k(\alpha_3-\alpha)}{\operatorname{sh}\gamma_k\alpha_3}-\frac{2c^2\left[\cos 2\beta_1+(-1)^{k+1}\cos 2\beta_2\right]}{k\pi(4-\gamma_k^2)}\Bigg(1-
$$

$$
-\frac{\operatorname{sh}\gamma_k\alpha}{\operatorname{sh}\gamma_k\alpha_3}\Bigg)-\frac{2c^2\left[1+(-1)^{k+1}\right]}{k\pi\gamma_k(4-\gamma_k^2)}\left[\gamma_k\left(\operatorname{ch}2\alpha-\operatorname{ch}2\alpha_3\frac{\operatorname{sh}\gamma_k\alpha}{\operatorname{sh}\gamma_k\alpha_3}\right)+\right.
$$

$$
\left.+\frac{\operatorname{sh}\gamma_k(\alpha_3-\alpha)}{\operatorname{sh}\gamma_k\alpha_3}(2\operatorname{sh}2\alpha_2\operatorname{sh}\gamma_k\alpha_2-\gamma_k\operatorname{ch}2\alpha_2\operatorname{ch}\gamma_k\alpha_2\right], \tag{23}
$$

$$
\varphi_k^{(2)}(\alpha)=D_k^{(1)}\frac{\operatorname{sh}\gamma_k(\alpha_3-\alpha_2)\operatorname{sh}\gamma_k(\alpha-\alpha_1)}{\operatorname{sh}\gamma_k(\alpha_2-\alpha_1)\operatorname{sh}\gamma_k\alpha_3}-
$$

$$
-\frac{2c^2\left[\cos 2\beta_1+(-1)^{k+1}\cos 2\beta_2\right]}{k\pi(4-\gamma_k^2)}\Bigg[1-\frac{\operatorname{sh}\gamma_k(\alpha_2-\alpha)}{\operatorname{sh}\gamma_k(\alpha_2-\alpha_1)}-
$$

$$
-\frac{\operatorname{sh}\gamma_k\alpha_2\operatorname{sh}\gamma_k(\alpha-\alpha_1)}{\operatorname{sh}\gamma_k(\alpha_2-\alpha_1)\operatorname{sh}\gamma_k\alpha_3}\Bigg]-\frac{2c^2\left[1+(-1)^{k+1}\right]}{k\pi\gamma_k(4-\gamma_k^2)}\Bigg\{\gamma_k\Bigg[\operatorname{ch}2\alpha-
$$

$$
-\operatorname{ch}2\alpha_3\frac{\operatorname{sh}\gamma_k\alpha_2\operatorname{sh}\gamma_k(\alpha-\alpha_1)}{\operatorname{sh}\gamma_k\alpha_3\operatorname{sh}\gamma_k(\alpha_2-\alpha_1)}-\operatorname{ch}2\alpha_1\frac{\operatorname{sh}\gamma_k(\alpha_2-\alpha)}{\operatorname{sh}\gamma_k(\alpha_2-\alpha_1)}\Bigg]+
$$

$$
+\frac{\operatorname{sh}\gamma_k(\alpha-\alpha_1)\operatorname{sh}\gamma_k(\alpha_3-\alpha_2)}{\operatorname{sh}\gamma_k\alpha_3\operatorname{sh}\gamma_k(\alpha_2-\alpha_1)}\left[2\operatorname{sh}2\alpha_2\operatorname{sh}\gamma_k\alpha_2-\gamma_k\operatorname{ch}2\alpha_2\operatorname{ch}\gamma_k\alpha_2\right]\Bigg\}+
$$

$$
+\frac{2\gamma_k}{\beta_2-\beta_1}(-1)^{k+1}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{f_p(\beta_2)\sin\mu_p(\alpha-\alpha_1)}{\mu_p^2+\gamma_k^2}. \tag{24}
$$

Удовлетворив теперь условиям (20) и переходя от неизвестных $B_k^{(1)}$ и $D_k^{(1)}$ к X_k и Y_k, где

$$
\left.\begin{aligned}
X_k&=k(-1)^{k+1}f_k^{(1)}(\beta_2)\\
Y_k&=k(-1)^{k+1}\varphi_k^{(1)}(\alpha_2)
\end{aligned}\right\}, \tag{25}
$$

для определения последних получим следующие бесконечные системы линейных уравнений:

$$
\left.\begin{aligned}
X_k &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} Y_p + P_k \\
Y_k &= \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} X_p + Q_k
\end{aligned}\right| \tag{26}
$$

где введены следующие обозначения:

$$
\left.\begin{aligned}
a_{kp} &= \frac{2\mu_k \operatorname{sh} \mu_k (\beta_2 - \beta_1) \operatorname{sh} \mu_k (\beta_3 - \beta_2)}{(\beta_2 - \beta_1) \operatorname{sh} \mu_k (\beta_3 - \beta_1) \cdot (\gamma_p^2 + \mu_k^2)}, \\
b_{kp} &= \frac{2\gamma_k \operatorname{sh} \gamma_k (\alpha_2 - \alpha_1) \operatorname{sh} \gamma_k (\alpha_3 - \alpha_2)}{(\alpha_2 - \alpha_1) \operatorname{sh} \gamma_k (\alpha_3 - \alpha_1) \cdot (\mu_p^2 + \gamma_k^2)},
\end{aligned}\right| \tag{27}
$$

$$
P_k = \frac{2c^2 [\operatorname{ch} 2\alpha_2 + (-1)^{k+1} \operatorname{ch} 2\alpha_1]}{\pi (4 + \mu_k^2)} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \mu_k (\beta_2 - \beta_1)}{\operatorname{sh} \mu_k (\beta_3 - \beta_1)} - \right.
$$

$$
\left. - \frac{\operatorname{sh} \mu_k (\beta_3 - \beta_2)}{\operatorname{sh} \mu_k (\beta_3 - \beta_1)} \right] + \frac{2c^2 [1 + (-1)^{k+1}]}{\pi (4 + \mu_k^2)} \left[\cos 2\beta_2 - \right.
$$

$$
\left. - \cos 2\beta_3 \frac{\operatorname{sh} \mu_k (\beta_2 - \beta_1)}{\operatorname{sh} \mu_k (\beta_3 - \beta_1)} - \cos 2\beta_1 \frac{\operatorname{sh} \mu_k (\beta_3 - \beta_2)}{\operatorname{sh} \mu_k (\beta_3 - \beta_1)} \right], \tag{28}
$$

$$
Q_k = - \frac{2c^2 [\cos 2\beta_2 + (-1)^{k+1} \cos 2\beta_1]}{\pi (4 - \gamma_k^2)} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \gamma_k (\alpha_2 - \alpha_1)}{\operatorname{sh} \gamma_k (\alpha_3 - \alpha_1)} - \right.
$$

$$
\left. - \frac{\operatorname{sh} \gamma_k (\alpha_3 - \alpha_2)}{\operatorname{sh} \gamma_k (\alpha_3 - \alpha_1)} \right] - \frac{2c^2 [1 + (-1)^{k+1}]}{\pi (4 - \gamma_k^2)} \left[\operatorname{ch} 2\alpha_2 - \right.
$$

$$
\left. - \operatorname{ch} 2\alpha_3 \frac{\operatorname{sh} \gamma_k (\alpha_2 - \alpha_1)}{\operatorname{sh} \gamma_k (\alpha_3 - \alpha_1)} - \operatorname{ch} 2\alpha_1 \frac{\operatorname{sh} \gamma_k (\alpha_3 - \alpha_2)}{\operatorname{sh} \gamma_k (\alpha_3 - \alpha_1)} \right]; \tag{29}
$$

Системы (26) вполне регулярны, так как из (27) имеем

$$
\sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \sum_{p=1}^{\infty} |b_{kp}| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{30}
$$

При этом использованы значение суммы

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \left(\operatorname{cth} a\pi - \frac{1}{a\pi} \right) \tag{31}
$$

и неравенство

$$
\frac{\operatorname{sh} (z_2 - z_1) \operatorname{sh} (z_3 - z_2)}{\operatorname{sh} (z_3 - z_1)} \leqslant \frac{1}{2} \qquad z_3 > z_2 > z_1. \tag{32}
$$

Легко видеть,, что свободные члены систем (26) ограничены сверху и стремятся к нулю при $k \to \infty$.

Соотношениями (21)—(24), (8) и (9) функция напряжений $U(\alpha, \beta)$ в области поперечного сечения стержня определяется полностью.

Пользуясь этими выражениями, жесткость при кручении и касательные напряжения определяются по формулам

$$C = G c^2 \iint\limits_{\Omega} U(\alpha, \beta)(\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\beta)\, d\alpha\, d\beta \tag{33}$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_{\alpha z} &= -G\tau g\, \frac{\partial U}{\partial \beta} \\ \tau_{\beta z} &= -G\tau g\, \frac{\partial U}{\partial \alpha} \end{aligned}\right\} \quad g = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2}{\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\beta}} \tag{34}$$

где G—модуль сдвига, τ—угол закручивания на единицу длины стержня, а Ω—область поперечного сечения стержня.

Аналогичным способом можно получить решения для задач о кручении и изгибе призматических стержней с поперечными сечениями в виде эллипсов с выточками, с разрезами и полостями.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Բ. Լ. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ

Կորագիծ անկյունակի տեսքով լայնական կտրվածք ունեցող պրիզմատիկ ձողերի ոլորումը

Հոդվածում դիտարկվում էլիպտական կոորդինատային գծերով կազմված կորագիծ անկյունակի տեսքի լայնական կտրվածքով պրիզմատիկ ձողերի ոլորումը։

Խնդրի լուծումը բերված է գծային հավասարումների անվերջ սիստեմների լուծմանը։ Ցույց է տրված, որ այդ սիստեմները լիովին ռեգուլյար են և ունեն վերևից սահմանափակված ազատ անդամներ, որոնք զերոյի են ձգտում երբ $k \to \infty$։

Հոդվածում շարադրված ձևով կարելի է ստանալ նաև երկայնական ակոսներ, կտրվածքներ և փորվածքներ ունեցող էլիպսի ձևի լայնական կտրվածքներով պրիզմատիկ ձողերի ոլորման և ծռման խնդիրների լուծումները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. П. Соколов.* Математический сборник, г. IX, вып. II, отд. I, 1878, 288—339. [2] *А. Гринхалл,* Fluid motion between confocal elliptic and confocal ellipsoids. Quart. Journ. of Math., vol. 16, 1879, 227— 256. [3] *Н. Х. Арутюнян,* ПММ, т. XIII, вып. 1 (1949), 107—112. [4] *Г. А Гринберг,* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, 1948. [5] *Л. В. Канторович, В. И. Крылов,* Приближенные методы высшего анализа. М., 1949, стр. 662.