А. А. Талалян и Э. М. Кегеян

О средней полиномиальной аппроксимации в единичном круге

Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 29.1 1960

Обозначим через D круг $|z| < 1$ в комплексной плоскости.

Известно, что если G область типа Каратеодори, т. е. область, граница которой совпадает с границей дополнительной области, содержащей бесконечно далекую точку, то в классе $H_2(G)$, т. е. в классе аналитических в области G функций $f(z)$, для которых

$$\iint_G |f(z)|^2 d\sigma < \infty, \quad (1)$$

где $d\sigma$ — элемент площади, возможна полиномиальная аппроксимация в среднем, т. е.

$$\inf_{\{P\}} \iint_G |f(z) - P(z)|^2 d\sigma = 0 \quad (2)$$

(см., например, ⁽¹⁾).

Далее А. Л. Шагиняном ⁽²⁾ было доказано, что если ограничиться только теми полиномами, которые имеют фиксированные значения в заданном конечном числе точек границы, то в областях типа Каратеодори опять имеет место аппроксимация вида (2).

В связи с этим, в настоящей заметке рассматривается следующая задача.

Пусть $f(z)$ произвольная функция из класса $H_2(D)$, а $\varphi(\theta)$ произвольная другая действительная и измеримая функция, заданная на отрезке $[0, 2\pi]$ (заметим, что $\varphi(\theta)$ может равняться бесконечности на множестве положительной меры).

Ищутся полиномы $P_n(z)$, для которых

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_D |f(z) - P_n(z)|^2 d\sigma = 0$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} P_n(e^{i\theta}) = \varphi(\theta)$$

почти всюду на интервале $(0, 2\pi)$.

Предварительно докажем следующую теорему.

Теорема 1. Если $f(z) \in H_2(D)$ произвольная функция, а $\varphi(\theta) \in L_2(0, 2\pi)$ произвольная другая действительная функция, то для любого $\varepsilon > 0$ существует полином $P(z)$, такой, что

$$1) \iint_D |f(z) - P(z)|^2 d\sigma < \varepsilon$$

$$2) \text{mes } E(|\varphi(\theta) - \text{Re}P(e^{i\theta})| > \varepsilon) < \varepsilon$$

При доказательстве этой теоремы используется следующая лемма, доказанная в (3).

Лемма 1: Если на отрезке $\Delta = [ab]$ заданы функции $\psi_0(x)$, $\psi_1(x) \dots \psi_n(x)$, которые принадлежат пространству $L_2(a, b)$, то для любых положительных η и $\delta < 1$ можно найти функцию $f(x) \in L_2(a, b)$ такую, что

$$1) \text{mes } E\{f(x) \neq 0\} \leq \delta(b-a)$$

$$2) \int_{\Delta} f^2(x) dx \leq \frac{1}{\delta} \int_{\Delta} \psi_0^2(x) dx$$

и, наконец,

$$3) \left| \int_{\Delta} \psi_0(x) \psi_k(x) dx - \int_{\Delta} f(x) \psi_k(x) dx \right| < \eta$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

Легко видеть, что из этой леммы непосредственно следует

Лемма 1': Пусть $\psi_0(\theta), \psi_1(\theta), \dots, \psi_n(\theta)$ произвольные действительные функции из класса $L_2(0, 2\pi)$. Тогда для любых положительных чисел $\delta < 1$ и η существует в классе $L_2(0, 2\pi)$ функция $\psi(\theta)$, обладающая следующими свойствами:

$$1) \text{mes } E(\psi_0 \neq \psi) \leq \delta 2\pi$$

$$2) \left| \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \psi_k(\theta) d\theta \right| < \eta$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

$$3) \|\psi\|^2 \leq \frac{4}{\delta} \|\psi_0\|^2$$

где $E(\psi_0 \neq \psi)$ — множество тех точек θ отрезка $(0, 2\pi)$, для которых $\psi_0(\theta) \neq \psi(\theta)$, а $\|\psi\|$ — норма функции ψ в пространстве $L_2(0, 2\pi)$.

Очевидно, если положим $\psi = \psi_0 - f$, где f функция, удовлетворяющая условиям леммы 1 (при этом полагается $(a, b) \equiv (0, 2\pi)$) то ψ будет удовлетворять условиям леммы 1'.

Переходя к доказательству теоремы, заметим прежде всего, что существует полином $S(z)$ такой, что

$$\iint_D |f(z) - S(z)|^2 d\sigma < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (3)$$

Обозначим через

$$\psi_0(\theta) = \varphi(\theta) - \operatorname{Re} S(e^{i\theta}). \quad (4)$$

Докажем, что существует полином $Q(z)$, обладающий следующими свойствами:

$$1) \iint_D |Q(z)|^2 d\sigma < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$2) \operatorname{mes} E(|\psi_0(\theta) - \operatorname{Re} Q(e^{i\theta})| > \varepsilon) < \varepsilon.$$

Ясно, что при наличии такого многочлена $Q(z)$, многочлен $P(z) = Q(z) + S(z)$ в силу (3) и (4) будет обладать следующими свойствами

$$1) \iint_D |f(z) - P(z)|^2 d\sigma = \iint_D |(f(z) - S(z)) - Q(z)|^2 d\sigma <$$

$$< (\|f - S\| + \|Q\|)^2 < \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \right)^2 = \varepsilon$$

$$2) \operatorname{mes} E(|\varphi(\theta) - \operatorname{Re} P(e^{i\theta})| > \varepsilon) =$$

$$= \operatorname{mes} E(|\psi_0(\theta) - \operatorname{Re} Q(e^{i\theta})| > \varepsilon) < \varepsilon$$

т. е. теорема будет доказана.

Для построения полинома $Q(z)$ возьмем положительное целое число n_0 и положительное число η , удовлетворяющие неравенствам

$$\frac{16\pi \|\psi_0\|^2}{n_0} < \frac{\varepsilon^2}{8} \quad (5)$$

$$\eta < \sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{8(n_0+1)}} \quad (6)$$

В лемме 1' возьмем вместо ψ_0 функцию, определенную равенством (4), а за функции $\psi_1(\theta), \psi_2, \dots, \psi_n(\theta)$ возьмем первые $(2n_0 + 1)$ функции тригонометрической системы

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin \theta}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos \theta}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\sin n_0 \theta}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos n_0 \theta}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

Из этой леммы следует, что существует функция $\psi(\theta)$, такая, что

$$1) \operatorname{mes} E(\psi \neq \psi_0) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (7)$$

$$2) \left| \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \cos k\theta d\theta \right| < \eta, \quad \left| \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \sin k\theta d\theta \right| < \eta \quad (8)$$

$$k = 0, 1, \dots, n_0$$

$$3) \|\psi\|^2 < \frac{16\pi \|\psi_0\|^2}{\varepsilon} \quad (9)$$

(в лемме 1' вместо δ взято $\frac{\varepsilon}{4\pi}$).

Так как $\psi(\theta) \in L_2(0, 2\pi)$, то существует число N такое, что при $n > N$ для всех частных сумм n -го порядка ряда Фурье функции $\psi(\theta)$ имеем

$$\int_0^{2\pi} \left| \psi(\theta) - \left(\frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\sqrt{\pi}} \cos k\theta + \frac{b_k}{\sqrt{\pi}} \sin k\theta \right) \right|^2 d\theta < \frac{\varepsilon^3}{2}, \quad (10)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) d\theta, \quad a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \cos k\theta d\theta, \quad (11)$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \sin k\theta d\theta.$$

Обозначим через

$$Q(z) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{\sqrt{\pi}} - i \frac{b_k}{\sqrt{\pi}} \right) z^k.$$

Из (10) имеем

$$\int_0^{2\pi} |\psi(\theta) - \operatorname{Re} Q(e^{i\theta})|^2 d\theta < \frac{\varepsilon^3}{2}. \quad (12)$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \iint_D |Q(z)|^2 d\sigma &= \iint_D Q(z) \overline{Q(z)} d\sigma = \\ &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2 + b_k^2}{k+1} = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n_0} + \sum_{n_0+1}^n. \end{aligned}$$

В силу (6), (8) и (11) будем иметь

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n_0} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k+1} < \frac{\eta^2 (n_0 + 1)}{\pi} < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Далее, из неравенства Бесселя из (5) и (9) вытекает

$$\sum_{n_0+1}^n \frac{a_k^2 + b_k^2}{k+1} < \frac{1}{n_0} \|\psi\|^2 < \frac{16\pi \|\psi_0\|^2}{n_0 \cdot \varepsilon} < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Так что окончательно получаем

$$\iint_D |Q(z)|^2 d\sigma < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Но из (12) вытекает, что

$$\text{mes} (|\psi(\theta) - \text{Re}Q(e^{i\theta})| > \varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда, учитывая (7), получаем

$$\text{mes} (|\psi_0(\theta) - \text{Re}Q(e^{i\theta})| > \varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теперь легко доказать, что задача, сформулированная вначале настоящей статьи, имеет положительное решение, а именно, справедлива

Теорема 2: Если $f(z) \in H_2(D)$ произвольная функция, а $\varphi(\theta)$ произвольная другая измеримая функция, то существует последовательность многочленов $P^{(k)}(z)$ такая, что

$$1) \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_D |f(z) - P^{(k)}(z)|^2 d\sigma = 0$$

$$2) \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Re}P^{(k)}(e^{i\theta}) = \varphi(\theta)$$

почти всюду на интервале $(0, 2\pi)$.

Обозначим через

$$\varphi_k(\theta) = \begin{cases} \varphi(\theta) & \text{если } |\varphi| \leq k \\ k & \text{если } |\varphi| > k \end{cases}$$

и возьмем последовательность положительных чисел ε_k , где

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty. \quad (13)$$

Согласно теореме 1, для каждого ε_k существует полином $P_{(\cdot)}^{(k)}$ такой, что

$$\iint_D |f(z) - P_{(\cdot)}^{(k)}|^2 d\sigma < \varepsilon_k \quad (14)$$

и

$$\text{mes } E (|\varphi_k(\theta) - \text{Re}P^{(k)}(e^{i\theta})| > \varepsilon_k) < \varepsilon_k. \quad (15)$$

Обозначим через

$$F_k = [0, 2\pi] - E(|\varphi_k(\theta) - \operatorname{Re} P^{(k)}(e^{i\theta})| > \varepsilon_k) \quad (16)$$

и

$$E_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=n}^{\infty} E_k. \quad (17)$$

Из (13), (15) и (16) следует, что

$$\operatorname{mes} E_0 = 2\pi.$$

Легко видеть, что при $\theta \in E_0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Re} P^{(k)}(e^{i\theta}) = \varphi(\theta).$$

Если в теореме 2 возьмем $\varphi(\theta) \equiv +\infty$, получим

Следствие: Для каждого $f(z) \in H_2(D)$ существует последовательность многочленов $P_{(z)}^{(k)}$, такая, что

$$1) \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_D |f(z) - P_{(z)}^{(k)}| dz = 0.$$

$$2) \lim_{k \rightarrow \infty} |P^{(k)}(e^{i\theta})| = \infty.$$

п. в. на $(0, 2\pi)$.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ա. ՅԱԼԱԼՅԱՆ և Է. Մ. ՔԵԶԵՅԱՆ

Միավոր շրջանում միջին բազմանդամային մոտարկման մասին

Ներկա հոդվածում հիմնականում ապացուցվում է հետևյալ արդյունքը.

Թեորեմ.— Ինչպիսին էլ լինի $|\xi| = 1$ շրջանագծի վրա արված $\varphi(\xi)$ իրական և չափելի ֆունկցիան (որը կարող է հավասար լինել անվերջի դրական չափի բազմադրյան վրա), և ինչպիսին էլ լինի միավոր շրջանում միջին բազմանդամային ինտեգրելի $f(z)$ ֆունկցիան, միշտ հնարավոր է գտնել $\{P_{(z)}^{(k)}\}$ բազմանդամներ, որոնց համար

$$1. \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{|z| < 1} |f(z) - P_{(z)}^{(k)}|^2 dz = 0.$$

$$2. \lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Re} P^{(k)}(\xi) = \varphi(\xi).$$

համարյա ամենուրեք $|\xi| = 1$ շրջանագծի վրա:

ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, стр. 428. ² А. Л. Шагинян, ДАН АрмССР, т. XVI, № 1 (1953). ³ С. Качмаж, Г. Штейнгауз, Теория ортогональных рядов, стр. 374.