

М. А. Задоян

О ползучести бетонной плиты при воздействии гамма-излучения

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 13. II 1960)

1°. Рассмотрим напряженное состояние бетонной, свободной от закреплений, бесконечной плиты при воздействии гамма-излучения с учетом ползучести материала. Пусть на поверхность плиты (фиг. 1) падает плоско-параллельный равномерный поток гамма-лучей, интенсивность которого во времени остается постоянной. Распределение плотности тепловыделения по толщине плиты, как известно, определяется формулой ⁽¹⁾

$$H(x) = I E_{\gamma} \mu_e e^{-\mu_0 x}, \quad (1)$$

где I — ток гамма-квантов $\left[\frac{\text{гамма-кванты}}{\text{см}^2 \cdot \text{сек}} \right]$,

E_{γ} — энергия гамма-кванта [Мэв], μ_e — коэффициент поглощения энергии [см⁻¹], μ_0 — полный коэффициент поглощения гамма-квантов [см⁻¹]. Пред-

полагаем, что поверхности плиты теплоизолированы и поддерживаются при постоянной тем-

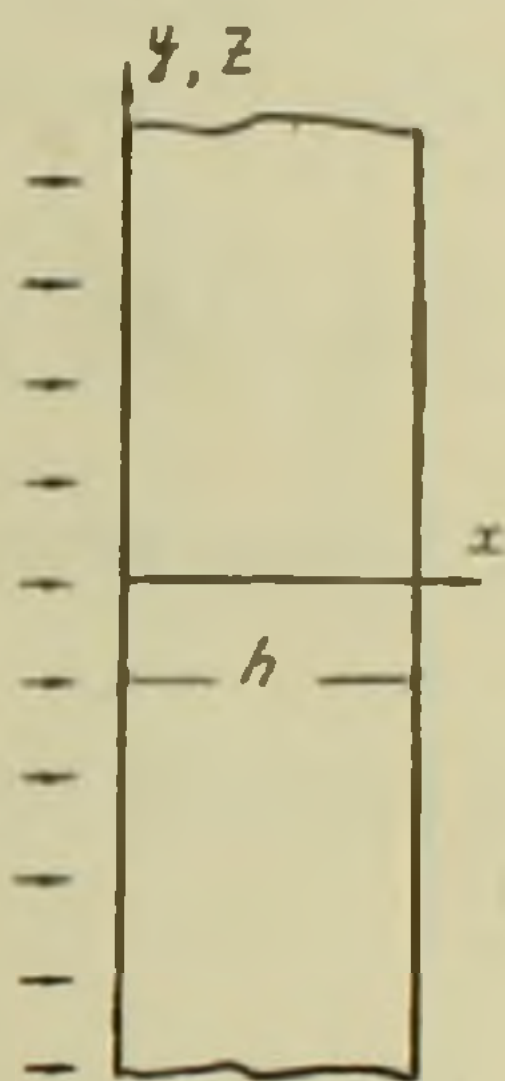
пературе, равной нулю: $T = 0$ при $x = 0$ и $x = h$. При таких граничных условиях решение уравнения теплопроводности

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} + H = 0 \quad (2)$$

имеет вид

$$T(x) = \frac{I E_{\gamma} \mu_e}{k \mu_0^2} \left[1 - e^{-\mu_0 x} - (1 - e^{-\mu_0 h}) \frac{x}{h} \right], \quad (3)$$

где k — коэффициент теплопроводности. Для такого закона распределения температуры в работе М. Хиллера ⁽¹⁾ при помощи известных формул теории упругости определены напряжения в закрепленной бесконечной плите.



Фиг. 1.

2°. При достаточно больших значениях $IE_1\mu$, обычно имеющих место в корпусах ядерных реакторов (2), возникает высокая температура. Поэтому при расчете на ползучесть рассматриваемой плиты будем учитывать влияние температуры на свойства ползучести и модуля упругости бетона. Положим, что

$$C^*(T, t, \tau) = C(t, \tau) e^{\mu T(x, t)} \quad (4)$$

$$E^*(T) = E_0 e^{-\gamma T(x, t)},$$

где C^* , C , E^* и E_0 меры ползучести и модули упругости бетона соответственно при высоких и обычных температурах, а коэффициенты μ и γ определяются из эксперимента. В выражениях (4) и в дальнейшем, для общности, температурную функцию будем считать зависящей как от x , так и от времени t .

Экспериментальное исследование модуля упругости бетона при достаточно большом диапазоне изменения температуры произведено В. Н. Мурашевым (3) и В. А. Харламовым (4). Экспериментальному изучению свойства ползучести бетона при высоких температурах посвящена работа В. А. Харламова (4).

Зависимость между компонентами напряжений и деформаций согласно (5) имеет вид

$$\varepsilon_y - \alpha T = \frac{1}{E(T)} [\sigma_y - \nu \sigma_z] - \int_{\tau_0}^t [\sigma_y - \nu \sigma_z] \frac{\partial}{\partial \tau} C^*(T, t, \tau) d\tau. \quad (5)$$

Для рассматриваемой задачи, принимая

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon(x, t), \quad \sigma_y = \sigma_z = \sigma(x, t)$$

и учитывая соотношения (4), получим

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{1 - \nu} [\varepsilon(x, t) - \alpha T(x, t)] = \\ = \sigma(x, t) e^{\mu T(x, t)} - \int_{\tau_0}^t \sigma(x, \tau) e^{\mu T(x, t)} K(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$K(t, \tau) = E_0 \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau), \quad C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}] \quad (7)$$

Аналогично гипотезе плоских сечений, следуя работам (6-7), примем

$$\varepsilon(x, t) = A(t) + B(t)x, \quad (8)$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — неизвестные функции от времени.

Обозначая $\lambda = \gamma - \mu$ (не ограничивая общности примем $\lambda > 0$), используя гипотезу (8) и условия равновесия

$$\int_0^h \sigma(x, t) dx = 0, \quad \int_0^h \sigma(x, t) x dx = 0, \quad (9)$$

из (6) получим:

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) e^{\lambda T(x, t)} - \int_0^h \sigma(\xi, t) e^{\lambda T(\xi, t)} M(\xi, x, t) d\xi = \\ = F(x, t) + \int_{\tau_0}^t \sigma(x, \tau) K(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (10)$$

где введены следующие обозначения:

$$M(\xi, x, t) = e^{-\mu T(x, t)} \left[\frac{a_1 \xi - a_2}{a_1^2 - a_0 a_2} - \frac{a_0 \xi - a_1}{a_1^2 - a_0 a_2} x \right]; \quad (11)$$

$$F(x, t) = \frac{E_0 \alpha e^{-\mu T(x, t)}}{1 - \nu} \left[\frac{a_1 b_1 - a_2 b_0}{a_1^2 - a_0 a_2} + \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{a_1^2 - a_0 a_2} x - T(x, t) \right], \quad (12)$$

$$a_n = \int_0^h e^{-\mu T(x, t)} x^n dx, \quad b_n = \int_0^h e^{-\mu T(x, t)} T(x, t) x^n dx. \quad (13)$$

Для коэффициента a_n индекс n принимает значения 0; 1; 2; а для b_n — 0; 1. При нестационарных режимах a_n и b_n являются известными функциями от t .

Легко заметить, что функция $F(x, t)$ и ядро $M(\xi, x, t)$ удовлетворяют условию:

$$\int_0^h M(x, t) x^n dx = 0 \quad \text{при } n = 0; 1. \quad (14)$$

$$\int_0^h M(\xi, x, t) x^n dx = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0; \\ \xi & \text{при } n = 1. \end{cases} \quad (15)$$

Если ввести новые обозначения

$$\Omega(x, t) = \sigma(x, t) e^{\lambda T(x, t)}, \quad N(x, t, \tau) = K(t, \tau) e^{-\lambda T(x, t)}, \quad (16)$$

то уравнение (10) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \Omega(x, t) = F(x, t) + \\ + \int_0^h \Omega(\xi, t) M(\xi, x, t) d\xi + \int_{\tau_0}^t \Omega(x, \tau) N(x, t, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, определение напряжения в рассматриваемой плите свелось к решению интегрального уравнения типа (10) или (17). Полученное уравнение характеризуется двумя ядрами $M(\xi, x, t)$ и $N(x, t, \tau)$.

которые являются ядрами, соответственно, Фредгольма и Вольтерра.

3°. Решение уравнения (10) ищем в виде ряда по параметру λ

$$\sigma(x, t) = \sigma_0(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sigma_n(x, t). \quad (18)$$

Подставляя (18) в уравнение (10), используя разложение $e^{\lambda T}$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ , получим

$$\sigma_0(x, t) = F(x, t) + \int_{\tau_0}^t \sigma_0(x, \tau) K(t, \tau) d\tau, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sigma_n(x, t) = & \int_0^h M(\xi, x, t) \sum_{m=0}^{n-1} \sigma_m(\xi, t) \frac{T^{n-m}(\xi, t)}{(n-m)!} d\xi - \\ & - \sum_{m=0}^{n-1} \sigma_m(x, t) \frac{T^{n-m}(x, t)}{(n-m)!} + \int_{\tau_0}^t \sigma_n(x, \tau) K(t, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (20)$$

($n = 1, 2, \dots$)

Отметим, что при получении последних соотношений использовано условие

$$\int_0^h M(\xi, x, t) \sigma_n(\xi, t) d\xi = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

вытекающее из (9), (11), (15) и (18).

Решение уравнения (19) можно представить в виде

$$\sigma_0(x, t) = L(F), \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} L(F) = & F(\tau_0) + [F'(\tau_0) - E_0 \gamma_0 \varphi(\tau_0) F(\tau_0)] \int_{\tau_0}^t e^{-\eta(\tau)} d\tau + \\ & + \int_{\tau_0}^t e^{-\eta(\tau)} d\tau \int_{\tau_0}^{\tau} e^{\eta(z)} [F''(z) + \gamma_0 F'(z)] dz, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\eta(t) = \gamma_0 \int_{\tau_0}^t [1 + E_0 \varphi(\tau)] d\tau, \quad (23)$$

Причем штрих означает дифференцирование по t , а аргумент x для краткости опущен.

Аналогичным образом из (20) находим

$$\sigma_n(x, t) = \int_0^h M(\xi, x, t) \sum_{m=0}^{n-1} L(\sigma_m) \frac{T^{n-m}}{(n-m)!} d\xi - \\ - \sum_{m=0}^{n-1} L(\sigma_m) \frac{T^{n-m}}{(n-m)!}, \quad (24)$$

задавая $n = 1, 2, \dots$, из рекуррентной формулы (24) определяем коэффициенты разложения (18).

Докажем сходимость ряда (18). Решение уравнения (19) представим в виде

$$\sigma_0(x, t) = F(x, t) + \int_{\tau_0}^t F(x, \tau) R(t, \tau) d\tau, \quad (25)$$

где $R(t, \tau)$ — резольвента ядра $K(t, \tau)$, выражение которого определено в (9). Аналогичным образом из (20) имеем

$$\sigma_n(x, t) = \int_0^h M(\xi, x, t) \sum_{m=0}^{n-1} \sigma_m(\xi, \tau) \frac{T^{n-m}(\xi, t)}{(n-m)!} d\xi - \sum_{m=0}^{n-1} \sigma_m(x, t) \frac{T^{n-m}(x, t)}{(n-m)!} + \\ + \int_{\tau_0}^t \left\{ \int_0^h M(\xi, x, \tau) \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_m(\xi, \tau) \frac{T^{n-m}(\xi, \tau)}{(n-m)!} d\xi - \right. \\ \left. - \sum_{m=0}^{n-1} \sigma_m(x, \tau) \frac{T^{n-m}(x, \tau)}{(n-m)!} \right\} R(t, \tau) d\tau \quad (26) \\ (n = 1, 2, \dots)$$

Для значений аргументов $\tau_0 \leq t \leq t_0$, $0 \leq x \leq h$ введем обозначения

$$F_0 = \max |F(x, t)|, \quad M_0 = \max |M(\xi, x, t)| \\ T_0 = \max |T(x, t)|, \quad \overline{\sigma_n} = \max |\sigma_n(x, t)|, \quad (n = 0, 1, \dots)$$

$$D_0 = 1 + \int_{\tau_0}^{t_0} |R(t, \tau)| d\tau, \quad D = (1 + M_0 h) D_0.$$

Тогда из (25) и (26) будем иметь

$$|\sigma_0(x, t)| < \overline{\sigma_0} = D_0 F_0, \\ |\sigma_1(x, t)| < \overline{\sigma_1} = D \overline{\sigma_1} \frac{T_0}{1!},$$

$$|\sigma_2(x, t)| < \bar{\sigma}_2 = D \left(\bar{\sigma}_0 \frac{T_0^2}{2!} + \bar{\sigma}_1 \frac{T_0}{1!} \right),$$

$$|\sigma_n(x, t)| < \bar{\sigma}_n = D \left(\bar{\sigma}_0 \frac{T_0^n}{n!} + \bar{\sigma}_1 \frac{T_0^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \bar{\sigma}_{n-1} \frac{T_0}{1!} \right).$$

Умножая обе части равенства (неравенства), начиная со второй строки на $\lambda, \lambda^2, \dots$ и складывая получим

$$S_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n |\sigma_n(x, t)| < \bar{S}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \bar{\sigma}_n$$

С другой стороны, легко заметить

$$\bar{S}_n \left[1 - D \left(\frac{\lambda T_0}{1!} + \frac{\lambda^2 T_0^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^n T_0^n}{n!} \right) \right] < D_0 F_0. \quad (28)$$

Тогда при

$$\lambda < \lambda_0 = \frac{1}{T_0} \ln \frac{1+D}{D} \quad (27)$$

находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n < S = \frac{D_0 F_0}{1 - D(e^{\lambda T_0} - 1)}.$$

Таким образом доказано, что для значения $\lambda < \lambda_0$ ряд (18) сходится абсолютно и равномерно.

4°. Для рассматриваемого случая стационарного облучения, имеем

$$\sigma_0(x, t) = F(x) \chi_0(t), \quad \sigma_1(x, t) = F_1(x) \chi_1(t), \quad (30)$$

где

$$F_1(x) = \int_0^h M(\xi, x) F(\xi) \frac{T(\xi)}{1!} d\xi - F(x) \frac{T(x)}{1!}, \quad (31)$$

$$\chi_0(t) = 1 - \frac{E_0 C_0}{1 + E_0 C_0} \left[1 - e^{-\gamma_0(1 + E_0 C_0)(t - \tau_0)} \right] \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \chi_1(t) = 1 - \frac{E_0 C_0}{1 + E_0 C_0} \left\{ \left(2 - \frac{E_0 C_0}{1 + E_0 C_0} \right) [1 - e^{-\gamma_0(1 + E_0 C_0)(t - \tau_0)}] - \right. \\ \left. - \gamma_0 E_0 C_0 (t - \tau_0) e^{-\gamma_0(1 + E_0 C_0)(t - \tau_0)} \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

причем, при выводе последних формул, для простоты принято в (7) $\varphi(\tau) \approx C_0$. Ограничиваясь двумя членами ряда, будем иметь

$$\sigma(x, t) = F(x) \chi_0(t) + \lambda F_1(x) \chi_1(t) \quad (34)$$

При $t = \tau_0$ и $t \rightarrow \infty$, имеем

$$\sigma(x, \tau_0) = F(x) + \lambda F_1(x), \quad (35)$$

$$\sigma(x, \infty) = \frac{F(x)}{1 + E_0 C_0} + \frac{\lambda F_1(x)}{(1 + E_0 C_0)^2}. \quad (36)$$

Рассмотренная задача показывает, что учет влияния температуры на ползучесть и модуль упругости бетона характерен тем, что свойства ползучести оказывают влияние как на величины напряжения, так и на деформации.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

Բետոնյա սալի սողֆը զամմա-ճառագայթման ազդեցության ժամանակ

Ուսումնասիրվում է անփերջ բետոնյա սալի լարվածային վիճակը, սողֆի հաշվառումով, երբ սալի արտաքին մակերևույթը ենթարկվում է հաժախաբաշխի բաշխված հարթ-դուգահեռ զամմա ճառագայթների ազդեցությանը (դժ. 1):

Ընդունվում է, որ ճառագայթների առաքելությունը ժամանակի ընթացքում մնում է անփոփոխ: Սալի ներսում առաջանում է ջերմային աղբյուր (1): Ջերմահաղորդականության հաժախարման (2) լուծումը դրոյական եղբային պայմանների դեպքում ունի (3) տեսքը: 1-գամմա-բվանտների հոսանքն է, E_T — գամմա քվանտի էներգիան է, μ_e — էներգիայի կլանման գործակիցն է, μ_0 — գամմա-քվանտի կլանման լրիվ գործակիցն է:

Բավականաչափ մեծ $|E_T \mu_e|$ — ի դեպքում, որը տեղի ունի միջուկային ռեակտորների կորպուսներում, առաջանում է բարձր ջերմություն:

Ջերմության ազդեցությունը նյութի սողֆի և առաձգականության մոդուլի վրա հաշվի է առնվում (4) արտահայտությունների համաձայն:

Օդտադործելով հարթ հատվածների հիպոթեզը (8), սողֆի հաժախարումը (6) և հաժախարակցություն պայմանները լարման համար ստանում ենք (10) տիպի ինտեգրալ հավասարում: Վերջինս կարելի է ներկայացնել նաև (17) տեսքով:

$$\Omega(x, t) = F(x, t) + \int_0^h \Omega(\xi, t) M(\xi, x, t) d\xi + \int_{\tau_0}^t \Omega(x, \tau) N(x, t, \tau) d\tau,$$

որտեղ նշանակված են

$$\Omega(x, t) = \sigma(x, t) e^{\lambda T(x, t)}, \quad N(x, t, \tau) = K(t, \tau) e^{-\lambda T(x, \tau)}$$

Ստացված ինտեգրալ հավասարման լուծումը փնտրվում է (18) շարքի տեսքով: Հարումը որոշելու համար ստացվում են ռեկուրենտ բանաձևեր (24):

Ապացուցվում է որ (18) շարքը բացարձակ և հավասարաչափ դուգամետ է, երբ

$$\lambda < \frac{1}{T_0} \ln \frac{1+D}{D}$$

Մասնավորապես ուսումնասիրվում է ստացիոնար ճառագայթման դեպքը:

¹ М. Хиллер. Thermal stresses in reactor shells due to γ -irradiation, Journal of Nuclear Energy, November, 1958. ² А. И. Комаровский. Строительные материалы для защиты от излучений ядерных реакторов и ускорителей, Атомиздат, М., 1958. ³ В. Н. Мурашев. Некоторые особенности теории проектирования жароупорных бетонных и железобетонных конструкций тепловых агрегатов. Исследования по жароупорным бетону и железобетону-ЦНИПС, М., 1954. ⁴ В. А. Харламов. Исследования ползучести жароупорного бетона при высоких температурах. Исследования по жароупорным бетону и железобетону-НИПС, М., 1959, № 6. ⁵ Н. Х. Арутюнян. Некоторые вопросы теории ползучести, М.-Л., Гостехиздат, 1952. ⁶ Г. Н. Маслов. Температурные напряжения и деформации бетонных массивов на основах теории упругости, Известия НИИГ, т. 13, 1934. ⁷ А. В. Белов и П. И. Васильев. „Гидротехническое строительство“, 1952, № 9. ⁸ М. А. Задоян. „Известия АН АрмССР“, (сер. физ.-мат. наук), т. X, № 5, (1957). ⁹ М. А. Задоян. „Известия АН АрмССР“ (серия физ.-мат. наук), т. X № 1 (1958).