ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXX 1960 5

МАТЕМАТИКА

Г. В. Бадалян

О нулях квазиполиномов Лежандра

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 21. I 1960)

В работе рассматривается вопрос распределения нулей функций

$$X_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c}\prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{\zeta+\gamma'_\nu}{\zeta-\gamma_\nu}\,\frac{x^\zeta d\zeta}{\zeta-\gamma_n},\ n=1,2,3,\ldots \tag{1}$$

$$X_0(x)=1,\ \text{где}\ \gamma'_\nu=\gamma_\nu+1,\ \nu=0,1,2,\ldots,$$

$0=\gamma_0<\gamma_1\leqslant\ldots\leqslant\gamma_n\leqslant\ldots$, простой контур интегрирования здесь и везде охватыват окрестости нулей знаменателя подинтегральной функции.

Введенную нами функцию (1) назовем квазиполиномом Лежандра n-ой обобщенной степени [1, 2].

Теорема 1. *Квазиполином Лежандра n-ой обобщенной степени на всей комплексной плоскости имеет всего n нулей, и все они находятся в интервале* (0, 1)*.

Докажем сперва, что квазиполином Лежандра n-ой обобщенной степени в (0, 1) имеет по крайней мере n нулей.

Действительно, известно, что

$$I(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c}\frac{x^\zeta d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta-\gamma_\nu)}=\frac{(-1)^n}{2\pi i}\int\limits_{c'}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}=$$

$$=\int\limits_1^x x_1^{\gamma_1-1}dx_1\int\limits_{x_1}^1 x_2^{\gamma_2-\gamma_1-1}dx\ldots\int\limits_1^{x_{n-1}}x^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1}dx_n, \tag{2}$$

(см. [3] стр. 35).

Заметим, что $I(1)=0$, а $I(x)$ в (0, 1) не обращается в нуль.

С другой стороны, $x\,I(x)$ на концах сегмента [0, 1] имеет равные нулю значения, это значит, что в силу теоремы Ролля

* Везде в статье речь идет о неэквивалентных нулях, т. е. о тех $x=e^t=\exp t$ для которых $X(e^t)=0$.

$$I_1(x) = (x\,I(x))' = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \frac{(\zeta+1)\,x^{\zeta}\,d\zeta}{\prod\limits_0^{n-1}(\zeta-\gamma_\nu)} \tag{3}$$

обращается в нуль хотя бы в одной точке $\xi_1^{(1)} \in (0, 1)$.

Рассмотрим теперь функцию

$$x^{\gamma_1+1}\,I_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \frac{(\zeta+1)\,x^{\zeta+\gamma_1+1}\,d\zeta}{\prod\limits_0^{n}(\zeta-\gamma_\nu)},$$

которая, как нетрудно заметить, обращается в нуль в точках $0, \xi_1^{(1)}, 1$.

Это значит, что опять в силу теоремы Ролля существуют точки

$$\xi_1^{(2)} \in (0, \xi_1^{(1)}),\quad \xi_2 \in (\xi_1^{(1)}, 1)$$

такие, что

$$I_2(x) = (x^{\gamma_1+1}\,I_1(x))' = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \frac{(\zeta+1)(\zeta+\gamma_1+1)\,x^{\zeta+\gamma_1}\,d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta-\gamma_\nu)} \tag{4}$$

обращается в них в нуль.

Нетрудно заметить, что

$$I_2(x)\,x^{\gamma_2-\gamma_1+1}$$

кроме точек $\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}$ обращается в нуль также в точках 0 и 1.

Продолжая этот процесс, убедимся, что $X_n(t)$ в интервале $(0, 1)$ обращается в нуль в не менее чем n точках.

Для завершения доказательства теоремы нам достаточно убедиться в том, что $X_n(x)$, вообще не может иметь более n корней.

С этой целью сошлемся на известную теорему (([4]), стр. 39) о том, что экспоненциальный полином

$$Q_d(t) = \sum_{k=1}^{p} e^{A_k t}\,P_k(t),$$

где $P_k(t)$ — полином степени $m_k - 1$, A_k — отличные друг от друга вещественные числа, имеет самое большее d нулей; когда $Q_d(t) \equiv 0$, то его степень считается равной единице.

Если применить вышеотмеченную теорему к квазиполиному Лежандра, который после подстановки $x = e^t$ превращается в экспоненциальный полином

$$X_n(e^t) = \sum_{k=0}^{n} C_{nk}\,e^{\gamma_k t}\,P_k(t),$$

где $P_k(t) \equiv 1$, если $\gamma_0 = 0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_n < \ldots$, в случае равенства между собой $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \ldots \leq \gamma_n \leq \ldots$, $P_k(t)$ — многочлен степени на единицу меньшей кратности, с которой γ_k участвует в последовательности $\{\gamma_k\}$.

Это значит, что $\sum m_k = n+1$, а

$$d = \sum m_k - 1 = n + 1 - 1 = n. \tag{4}$$

Таким образом получаем, что квазиполином Лежандра $X_n(x)$ имеет всего n нулей, но в силу леммы все эти нули находятся в $(0, 1)$.

Этим теорема доказана.

Теорема 2. *Нули квазиполиномов* $X_n(x)$ и $X_{n-1}(x)$ *перемежаются.*

Докажем сперва справедливость равенства

$$X_n(x) = X_{n-1}(x) + (\gamma_n + \gamma_n')X_n^*(x), \tag{5}$$

где

$$X_n^*(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \prod_{\nu=0}^{n-2} \frac{\zeta+\gamma_\nu'}{\zeta-\gamma_\nu} \frac{x^\zeta d\zeta}{(\zeta-\gamma_{n-1})(\zeta-\gamma_n)}.$$

Для доказательства заметим, что

$$X_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n-1}(\zeta+\gamma_\nu')x^\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta-\gamma_\nu)} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n-2}(\zeta+\gamma_\nu')\zeta x^\zeta d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta-\gamma_\nu)} + \frac{\gamma_{n-1}'}{2\pi i}\int_C \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n-2}(\zeta+\gamma_\nu')x^\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta-\gamma_\nu)} d\zeta$$

или

$$X_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\prod\limits_{\nu=2}^{n-2}(\zeta+\gamma_\nu')x^\zeta d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n-1}(\zeta-\gamma_\nu)} +$$

$$+ \frac{\gamma_n}{2\pi i}\int_C \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n-2}(\zeta+\gamma_\nu')x^\zeta d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta-\gamma_\nu)} + \frac{\gamma_{n-1}'}{2\pi i}\int_C \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n-2}(\zeta+\gamma_\nu')x^\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta-\gamma_\nu)} d\zeta$$

или

$$X_n(x) = X_{n-1}(x) + (\gamma_n + \gamma_{n-1}')X_n^*(x).$$

Заметим, теперь, что согласно предыдующей теореме $L_n^*(x)$ имеет всего n нулей, из коих один находится в $x=1$, а остальные $n-1$ нули находятся в $(0, 1)$. Обозначим их через

$$0<\xi_1^*<\xi_2^*<\ldots<\xi_{n-1}^*<\xi_n^*=1. \tag{6}$$

Из хода доказательства теоремы 1 следует, что нули $X_n^*(x)$ и $X_n(x)$ перемежаются, а именно, если нули $X_n(x)$ обозначить через

$$0<\xi_1^{(n)}<\xi_2^{(n)}<\ldots<\xi_n^{(n)}<1, \tag{7}$$

то

$$\xi_{i-1}^*<\xi_i^{(n)}<\xi_i^*, \tag{8}$$

где принято $\xi_0^*=0$.

Это значит, что нули $X_n(x)$ и $X_n^*(x)$ перемежаются. Ниже показано их взаимное расположение

$$0<\xi_1^{(n)}<\xi_1^*<\xi_2^{(n)}<\ldots<\xi_{n-1}^*<\xi_n^{(n)}<\xi_n^*=1.$$

Заметим теперь, что при $x=0$ функции $X_n(x)$ и $X_n^*(x)$ имеют одинаковый знак, тогда как $X_{n-1}(x)$ имеет противоположный с ними знак, а именно:

$$X_n(0)=\frac{\prod\limits_0^{n-1}\gamma_\nu'}{\prod\limits_1^{n}(-\gamma_\nu)}=\frac{(-1)^n}{\gamma_n}\prod_{\nu=1}^{n-1}\frac{\gamma_\nu'}{\gamma_\nu},$$

$$X_{n-1}(0)=\frac{\prod\limits_0^{n-2}\gamma_\nu'}{\prod\limits_1^{n-1}(-\gamma_\nu)}=\frac{(-1)^{n-1}}{\gamma^{n-1}}\prod_{\nu=1}^{n-1}\frac{\gamma_\nu'}{\gamma_\nu},$$

$$X_n^*(0)=\frac{\prod\limits_0^{n-2}\gamma_\nu'}{\prod\limits_1^{n}(-\gamma_\nu)}=\frac{(-1)^n}{\gamma_{n-1}\,\gamma^n}\prod_{\nu=1}^{n-2}\frac{\gamma_\nu'}{\gamma_\nu}.$$

Теперь, воспользуясь равенством (5), будем иметь

$$0=X_n(\xi_1^{(n)})=X_{n-1}(\xi_1^{(n)})+(\gamma_n+\gamma_{n-1}')\,X_n^*(\xi_1^{(n)})$$

или

$$X_{n-1}(\xi_1^{(n)})=-(\gamma_n+\gamma_n')\,X_n^*(\xi_1^{(n)}). \tag{9}$$

Так как $X_n^*(x)$ в $(0,\xi_1^{(n)})$ нулей не имеет, то это в силу (9) значит, что $X_{n-1}(x)$ в $(0,\xi_1^{(n)})$, или вообще не имеет нулей, или, если их имеет, то только в четном числе, иначе не могло бы быть, чтобы в точках $x=0$ и $x=\xi_1^{(n)}$, $X_{n-1}(x)$ и $X_n^*(x)$ имели противоположные знаки, когда в этом сегменте $X_n^*(x)$ сохраняет свой знак.

Рассмотим теперь интервал $(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)})$. В точках $\xi_1^{(n)}$ и $\xi_2^{(n)}$ функции $X_{n-1}(x)$ и $X_n^*(x)$ с силу (5) имеют противоположные по знаку значения. В $(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)})$, $X_n^*(x)$ меняет свой знак, это значит, что там и $X_{n-1}(x)$ меняет свой знак, т. е. $X_{n-1}(x)$ в этом интервале имеет нечетное число нулей.

Таким путем доказывается, что в каждом интервале

$$(\xi_i^{(n)}, \xi_{i+1}^{(n)}), \quad i = 1, 2 \ldots, n-1$$

функция $X_{n-1}(x)$ имеет по крайней мере по одному нулю.

Согласно теореме 1, $X_{n-1}(x)$ имеет всего $n-1$ корней.

Это значит, что $X_{n-1}(x)$ в $(0, \xi_1^{(n)})$ в нуль не обращается, а в каждом из интервалов

$$(\xi_i^{(n)}, \xi_{i+1}^{(n)}), i = 1, 2, \ldots, n-1$$

имеет только по одному корню. Следовательно, нули $X_{n-1}(x)$ и $X_n(x)$ перемежаются.

Теорема доказана.

Ереванский государственный университет

Հ. Վ. ԲԱԴԱԼՅԱՆ

Լեժանդրի տիպի բազմանդամների զերոների մասին

Աշխատանքում ցույց է տրված, որ Լեժանդրի տիպի բազմանդամն, այն է

$$X_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{\zeta + \gamma_\nu'}{\zeta - \gamma_\nu} \frac{x^\zeta d\zeta}{\zeta - \gamma_n}, \; n = 1, 2, \ldots,$$

$$X_0(x) = 1,$$

$$\gamma_\nu' = \nu_\nu + 1, \; 0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_n \leqslant \ldots$$

ֆունկցիայի բոլոր իրական արմատները գտնվում են (0, 1) միջակայքում։

Ինչպես նաև ցույց է տրված, որ $X_{n-1}(x)$ և $X_n(x)$ տիպի բազմանդամների զերոները (0, 1) միջակայքում դասավորված են մեջ ընդ մեջ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. В. Бадалян,* „Известия АН АрмССР", т. VII, № 5, 1955 [2] *Г. В. Бадалян,* „Известия АН АрмССР," т. IX, № 1, 1956. [3] *Г. В. Бадалян,* Обобщенные факториальные ряды, Сообщения института математики и механики АН Армянской ССР. вып. V, 1950. [4] *И. И. Хиршман* и *Д. В. Уиддер,* Преобразования типа свертки. Изд. ин. лит., М., 1958.