ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXX 1960 4

ДИНАМИЧЕСКАЯ МЕТЕОРОЛОГИЯ

А. М. Мхитарян

Об одном решении уравнения турбулентной теплопроводности

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 10. X 1959)

В работе (¹) впервые рассматривается вопрос о влиянии глубины водоема на испарение с его поверхности, применительно к условиям оз. Севан. Для этого решается уравнение турбулентной теплопроводности в водной массе, при заданном годовом ходе температуры поверхности воды. Уравнение это имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + W\frac{\partial T}{\partial z} = k'\Delta T + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \varepsilon. \tag{1}$$

Здесь x, y, z — координаты точки; начало координат расположено на поверхности воды; z — направлено вертикально вниз; x — вдоль скорости течения; t — время; T — температура частиц воды; u, w — составляющие скорости движения по осям координат; ε — приток тепла; k', k — коэффициенты турбулентной температуропроводности по горизонтали и вертикали соответственно, причем $k' = \text{const}$.

Далее считалось, что в условиях оз. Севан это уравнение может быть значительно упрощено и решалось следующее простое уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \tag{2}$$

Здесь принято допущение об отсутствии каких-либо течений в озере, кроме того, считается, что теплообмен по горизонтали по сравнению с таковым по вертикали сравнительно мал, отсутствуют объемные источники тепла и коэффициент обмена — величина постоянная.

Дальнейший анализ показал, что некоторые из этих допущений очень тяжелые и приводят к неудовлетворительным результатам. Это в первую очередь относится к коэффициенту обмена, величина которого на основании косвенных наблюдений меняется в зависимости от времени и глубины, причем в поверхностных слоях она примерно на два порядка больше величины молекулярного коэффициента для больших глубин. Кроме того, как показали наблюдения 1957—58 гг., воды оз. Севан отличаются большой прозрачностью, поэтому солнечная радиация проникает до больших глубин, порядка десятков метров, и пренебречь этим дополнительным притоком тепла нельзя.

На основании сказанного более точным должно быть следующее уравнение:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\varepsilon, \tag{3}$$

которое мы и рассмотрим в настоящей статье. Если обозначить через S_0 — суммарную солнечную радиацию, падающую на единицу поверхности воды в единицу времени, A — альбедо водной поверхности, α — коэффициент поглощения, c^* — теплоемкость воды и ρ^* — ее плотность, то на основании наблюдений можно положить

$$\varepsilon=S_0\,(1-A)\,\frac{\alpha}{c^*\rho^*}\,e^{-\alpha z}\,. \tag{4}$$

Что касается коэффициента обмена, то здесь следует отметить два обстоятельства. Во-первых, вертикальный турбулентный обмен в значительной степени обусловлен волновым перемешиванием, если считать, что в малых водоемах, в отличие от морей и океанов, отсутствуют ветровые течения. С другой стороны, на такой обмен оказывает известное влияние стратификация водных масс, причем в период охлаждения вод эта стратификация бывает неустойчивой вследствие того, что холодные массы оказываются на поверхности, а более теплые—на глубине. Это приводит к дополнительному перемешиванию. Кроме того, само перемешивание с глубиной быстро затухает и на достаточно больших глубинах турбулентное перемешивание затухает, теплопроводность носит уже молекулярный характер.

На основании сказанного можно положить

$$k=k_0+k_1\,(1+a\cos\Omega t)\left(1-\frac{z}{h}\right),\quad z<h \tag{5}$$

$$k=k_0,\quad z>h.$$

Здесь: $k_0=10^{-6}\,м^2/сек$ — коэффициент молекулярной температуропроводности: $k_1\simeq10^{-4}\,м^2/сек$ — среднее значение коэффициента обмена на поверхности воды; h — некоторая глубина, до которой коэффициент обмена линейно уменьшается, приближаясь к k_0, независимо от времени; $\Omega=2\cdot10^{-7}\,сек^{-1}$ — угловая скорость вращения Земли вокруг Солнца; a — безразмерная величина, характеризующая амплитуду годового хода коэффициента перемешивания. Так как k_1 в среднем на два порядка больше k_0, то можно положить:

$$k \simeq k_1 (1 + a\cos \Omega t)\left(1 - \frac{z}{h}\right), \tag{6}$$

причем при $z = h$ $k = k_0$, а не нулю, как это дает (6).

Таким образом нужно найти решение уравнения

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[k_1(1 + a\cos\Omega t)\left(1 - \frac{z}{h}\right)\frac{\partial T'}{\partial z}\right] + S_0(1 - A)\frac{\alpha}{c^*\rho^*}e^{-\alpha z}, \tag{7}$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} z &= 0 \quad T'(z,t) = T_0'(t), \\ z &\geq h \quad T'(t) = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

причем T' отклонение температуры воды от некоторого стационарного ее распределения.

Так как мы ищем периодическое решение, то начальные условия отсутствуют, кроме того, пусть

$$T_0'(t) = \sum_{m=1}^{\infty}(T_m \cos m\Omega t + T_m' \sin m\Omega t). \tag{9}$$

Перепишем уравнение (7) в следующем виде, отбросив для простоты штрихи

$$\frac{1}{1 + a\cos\Omega t}\frac{\partial T}{\partial t} = k_1\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(1 - \frac{z}{h}\right)\frac{\partial T}{\partial z}\right] + \frac{\alpha S_0(1 - A)e^{-\alpha z}}{c^*\rho^*(1 + a\cos\Omega t)}$$

и сделаем замену переменных

$$\tau = \Omega t + a\sin\Omega t. \tag{10}$$

Тогда $\dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial\tau}\cdot\dfrac{\partial\tau}{\partial t} = \Omega\,(1 + a\cos\Omega t)\dfrac{\partial}{\partial t}$

и уравнение наше примет следующий вид

$$\Omega\frac{\partial T}{\partial\tau} = k_1\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(1 - \frac{z}{h}\right)\frac{\partial T}{\partial z}\right] + S(\tau)e^{-\alpha z}. \tag{11}$$

Известную функцию $S(\tau)$ можно разложить в ряд

$$S(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}(\beta_n \cos n\tau + \beta_n' \sin n\tau). \tag{12}$$

Обратимся к граничному условию (9). Его нужно переписать по новой переменной τ. Для этого положим

$$T_m \cos m\Omega t + T_m' \sin m\Omega t = \sum_{n=0}^{\infty}(R_n^m \cos n\tau + R_n'^m \sin n\tau).$$

Тогда получим: $$T_0(\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(R_n^m\cos n\tau+R_n^{'m}\sin n\tau)\right],$$

или, переменив порядок суммирования и проведя его по m, получим:

$$T_0(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n\cos n\tau+\alpha_n'\sin n\tau), \tag{13}$$

причем

$$\alpha_n=\sum_{m=1}^{\infty}R_n^m,\quad \alpha_n'=\sum_{m=1}^{\infty}R_n^{'m}. \tag{14}$$

Итак, нужно найти решение уравнения (11), обращающееся в (13) при $z=0$ и в нуль, при $z=h$, если $S(\tau)$ представлено согласно (12). Ищем решение в следующем виде:

$$T(z,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}[A_n(z)\cos n\tau+B_n(z)\sin n\tau]. \tag{15}$$

Если обозначить

$$U_n(z)=A_n(z)+i\,B_n(z),\quad \alpha_n+i\,\alpha_n'=K_n,$$

$$\beta_n+i\beta_n'=L_n,\quad a_0=k_1/h, \tag{16}$$

то для определения U_n получается уравнение

$$(k_1-\alpha_0 z)\frac{d^2U_n}{dz^2}-a_0\frac{dU_n}{dz}+in\Omega\,U_n=-L_n\,e^{-\alpha z}. \tag{17}$$

Решением этого уравнения является

$$U_n(z)=C_{1,n}I_0\left(\frac{2}{a_0}\sqrt{in\Omega(k_1-\alpha_0 z)}\right)+$$

$$+C_{2,n}H_0\left(\frac{2}{a_0}\sqrt{in\Omega(k_1-a_0 z)}\right)+N_n(z)+M_n(z). \tag{18}$$

Здесь: $C_{1,n}$ и $C_{2,n}$ — постоянные интегрирования, $I_0(y_n)$ и $H_0(y_n)$ функции Бесселя и Ханкеля нулевого рода и первого порядка от комплексного аргумента,

$$N_n(z)=L_nI_0\left(\frac{2}{a_0}\sqrt{in\Omega(k_1-a_0 z)}\right)\int_0^z\frac{e^{-\alpha z}H_0\left(\frac{2}{a_0}\sqrt{in\Omega(k_1-a_0 z)}\right)dz}{\sqrt{in\Omega(k_1-a_0 z)}\,(I_0H_1-H_0I_1)}, \tag{19}$$

$$M_n(z)=L_n\,H_0\left(\frac{2}{a_0}\sqrt{in\Omega(k_1-a_0 z)}\right)\int_z^h\frac{e^{-\alpha z}\,I_0\left(\frac{2}{a_0}\sqrt{in\Omega(k_1-a_0 z)}\right)dz}{\sqrt{in\Omega(k_1-a_0 z)}\,(I_0H_1-H_0I_1)}.$$

где $I_1(y_n)$ и $H_1(y_n)$ — функции первого рода того же аргумента. Граничные условия согласно (13), (15) и (16) примут вид:

$$\text{при } z = 0 \quad U_n = \alpha_n + i\,\alpha'_n = K_n,$$

$$\text{при } z = h \quad U_n = 0,$$

воспользуясь которыми, из (18) получим:

$$C_{1,n} = \frac{N_n(h)\,H_0(0) - H_0(h)\,[M_n(0) - K_n]}{I_0(0)\,H_0(h) - H_0(0)\,I_0(h)},$$

$$C_{2,n} = \frac{-N_n(h)\,I_0(0) + I_0(h)\,[M_n(0) - K_n]}{I_0(0)\,H_0(h) - H_0(0)\,I_0(h)}. \tag{20}$$

Обозначим:

$$N_n(z) = N'_n(z) + i\,N''_n(z), \quad M_n(z) = M'_n(z) + i\,M''_n(z),$$

$$C_{1,n} = C'_{1,n} + i\,C''_{1,n}, \quad C_{2,n} = C'_{2,n} + i\,C''_{2,n}, \tag{21}$$

$$y_n = \frac{2}{a_0}\sqrt{in\,\Omega\,(k_1 - a_0 z)} = x_n\sqrt{i}, \quad x_n = \frac{2}{a_0}\sqrt{n\,\Omega\,(k_1 - a_0 z)}.$$

Из (18) получим:

$$A_n(z) = C'_{1,n}\,ber_0\,x_n - C''_{1,n}\,bei_0\,x_n + C'_{2,n}\,her_0\,x_n - C''_{2,n}\,hei_0\,x_n +$$

$$+ N'_n(z) + M'_n(z), \tag{22}$$

$$B_n(z) = C'_{1,n}\,bei_0\,x_n + C''_{1,n}\,ber_0\,x_n + C'_{2,n}\,hei_0\,x_n + C''_{2,n}\,her_0\,x_n +$$

$$+ N''_n(z) + M''_n(z).$$

Здесь:

$$I_0(x_n\sqrt{i}) = ber_0\,x_n + i\,bei_0\,x_n,$$

$$H_0(x_n\sqrt{i}) = her_0\,x_n + i\,hei_0\,x_n. \tag{23}$$

Имея A_n и B_n по (22), легко по (15) подсчитать $T(z, \tau)$ и при $z = \text{const}$ построить ход температуры по τ на различных глубинах, затем по (10) перейти к истинному времени, т. е. к годовому ходу, или при различных $\tau = \text{const}$ ($t = \text{const}$) построить профили температуры.

Путем подбора соответствующих параметров (α, k_1, a и h) можно добиться наилучшего согласия теории с наблюдениями, что даст возможность косвенно оценить k_1, a (следовательно и k) и h. Что касается α, то этот коэффициент определяется сравнительно легко и надежно. Полученное решение даст возможность вычислить величину

$$\left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{z=0},$$

которая определяет временной ход теплообмена между поверхностью и нижележащими слоями воды, важной характеристики входящей в уравнение теплового баланса поверхности воды.

Это последнее уравнение даст тогда возможность определить испарение с поверхности озера за такие промежутки времени, как месяц и меньше независимым методом, чего пока еще не удается делать при других подходах.

Этим вопросам будет посвящена наша следующая статья.

Институт энергетики и гидравлики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

Տուրբուլենտ ջերմահաղորդականության հավասարման մի լուծման մասին

Հոդվածում ցույց է տրվում, որ ջերմահաղորդականության (1) ընդհանուր տեսքն ունեցող հավասարման պարզեցումը (2) տեսքով և նրա լուծումը ջրամբարների համար բերում է ոչ բավարար արդյունքի՝ օրինակ Սևանա լճի պայմաններում։ Հատկապես անհրաժեշտ է լինում հաշվի առնել նախ տուրբուլենտ փոխանակման գործակցի փոփոխական լինելը կախված ժամանակից և խորությունից և ապա Սևանա լճի ջրերի բացառիկ թափանցիկությունը, որի հետևանքով արեգակի ճառագայթային էներգիան թափանցում է մինչև տասնյակ մետրերի հասնող խորություններ, ի տարբերություն ուրիշ ջրամբարների, որոնց ջրերի պղտորության հետևանքով նշված էներգիան համարյա ամբողջովին կլանվում է ջրի մերձմակերեսային շերտերում։ Ելնելով նորագույն դիտումների կոնկրետ արդյունքներից, ցույց է տրվում, որ նշված երկու ազդեցությունները Սևանա լճի պայմաններում, կարելի է մեծ ճշտությամբ հաշվի առնել (4) և (5) տեսքով և լուծել (7) հավասարումը (8) սահմանային պայմանների դեպքում։ Կատարելով փոփոխականի փոխարինում (10) տեսքով և ձևափոխելով սահմանային պայմանները ըստ նոր փոփոխականի, ստացվում է (11) հավասարումը (13) պայմանների դեպքում։ Լուծումը փնտրվում է (15) տեսքով, ըստ որում շարքի փոփոխական գործակիցների համար ստացվում է (17) դիֆերենցիալ հավասարումը փոփոխական գործակիցներով, որի լուծումը ունի (18) տեսքը։ Հիշյալ գործակիցների որոշման համար ստացվում են (22) արտահայտությունները։ Լուծումը հնարավորություն է տալիս անուղղակի ճանապարհով գնահատել տուրբուլենտ փոխանակման գործակիցը, ապա նաև հաշվել ջերմափոխանակությունը ջրի շերտերի միջև։ Վերջինս շատ կարևոր է, քանի որ նա մտնում է ջերմային բալանսի հավասարման մեջ, հավասարում, որն այս դեպքում հնարավորություն կտա մի նոր անկախ մեթոդով հաշվել գոլորշիացումը ջրամբարի մակերևույթից։ Ջերմային բալանսի մեթոդը մինչև այժմ հնարավորություն է տալիս գոլորշիացումը հաշվել ժամանակի մեծ ինտերվալների համար (օրինակ՝ տարվա), այժմ հնարավոր կլինի հաշիվներ կատարել ամսվա և ժամանակի ավելի փոքր ինտերվալների համար, որի կարևորությունն անվիճելի է։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. А. М. Мхитарян, Изв. АН АрмССР (серия техн. наук), т. XI, № 5 (1958).