ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXX 1960 4

МАТЕМАТИКА

Э. Р. Розендорн

Реализация метрики $ds^2 = du^2 + f^2(u)\,dv^2$ в пятимерном евклидовом пространстве

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 22. I 1960)

1. Как известно, плоскость Лобачевского не допускает регулярного вложения в E_3 (Д. Гильберт [1]; через E_m обозначаем m-мерное евклидово пространство). Д. Блануша построил реализацию плоскости Лобачевского в E_6 в виде поверхности класса C^∞, не имеющей самопересечений [2]. Покажем, что, если допускать самопересечения (точнее самоприкосновения), то, пользуясь методом Д. Блануша, можно построить в E_5 поверхность с метрикой

$$ds^2 = du^2 + f^2(u)\,dv^2, \tag{1}$$

где $f(u)$—положительная непрерывно дифференцируемая функция, определенная для всех значений u $(-\infty < u < +\infty)$, причем указанная поверхность принадлежит к тому же классу C^n или C^∞, что и $f(u)$. В частности, если $f(u) = \mathrm{ch}\,u$, получим вложение плоскости Лобачевского в E_5.

2. Используем функции:

$$\varphi_1(u) = \left(\int_0^1 e^{-\frac{1}{\sin^2 \pi t}} \sin \pi t\,dt\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\int_0^{u+1} e^{-\frac{1}{\sin^2 \pi t}} \sin \pi t\,dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\varphi_2(u) = \left(\int_0^1 e^{-\frac{1}{\sin^2 \pi t}} \sin \pi t\,dt\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\int_0^{u} e^{-\frac{1}{\sin^2 \pi t}} \sin \pi t\,dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\psi_1(u) = Na\left(\left[\max_{2n-1 \leqslant u \leqslant 2n+1} (|f|, |f'|)\right] + 1\right), \text{ если } 2n-1 \leqslant u < 2n+1,$$

$$\psi_2(u) = Na\left(\left[\max_{2n-2 \leqslant u \leqslant 2n} (|f|, |f'|)\right] + \sqrt{2}\right), \text{ если } 2n-2 \leqslant u < 2n.$$

Здесь $[\;]$ обозначает целую часть, n принимает всевозможные целые значения, $N \geqslant 2$—фиксированное целое число, $a = [\max|\varphi_i'|] + 2$. Функции φ_1 и φ_2 рассматривались в работе [2], ψ_1 и ψ_2—аналог ступенчатых функций работы [2]. Для реализации важны следующие свойства φ_i, доказанные в [2]:

1) $\varphi_i(u)$—периодические функции класса C^∞ с периодом 2.

2) $\varphi_1(1) = \varphi_1^{(k)}(1) = \varphi_2(0) = \varphi_2^{(k)}(0) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots$

При $u \neq 2n+1$ $\varphi_1(u) \neq 0$, при $u \neq 2n$ $\varphi_2(u) \neq 0$.

3) $\varphi_1^2(u) + \varphi_2^2(u) = 1$.

Поверхность с уравнениями (2) реализует метрику (1):

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = f(u)\varphi_1(u)\dfrac{\cos v\psi_1(u)}{\psi_1(u)}; \quad x_2 = f(u)\varphi_1(u)\dfrac{\sin v\psi_1(u)}{\psi_1(u)}; \\ x_3 = f(u)\varphi_2(u)\dfrac{\cos v\psi_2(u)}{\psi_2(u)}; \quad x_4 = f(u)\varphi_2(u)\dfrac{\sin v\psi_2(u)}{\psi_2(u)}; \\ x_5 = \displaystyle\int_0^u \sqrt{1 - \left\{\frac{1}{\psi_1(t)}\frac{d}{dt}(f(t)\varphi_1(t))\right\}^2 - \left\{\frac{1}{\psi_2(t)}\frac{d}{dt}(f(t)\varphi_2(t))\right\}^2}\, dt. \end{array}\right. \quad (2)$$

В этом можно убедиться, непосредственно вычисляя $ds^2 = dx_1^2 + \ldots + dx_5^2$ (учитывая, что $\psi_1'(u) = \psi_2'(u) = 0$).

Замечание. Подынтегральное выражение в формулах (2) имеет смысл, так как в силу построения ψ_i

$$\left|\frac{1}{\psi_i(u)}\frac{d}{du}(f(u)\varphi_i(u))\right| < \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Рассуждениями, аналогичными рассуждениям Д. Блануши [2], можно установить, что x_i принадлежат к тому же классу C^n или C^∞, к которому принадлежит $f(u)$.

3. Остановимся на расположении в E_5 поверхности, заданной уравнениями (2). Из (2), (3) и из свойств φ_i и ψ_i (в частности из несоизмеримости $\psi_1(u)$ и $\psi_2(u)$ при всех значениях u) вытекает следующее:

1) Поверхность неограниченно простирается вдоль оси x_5 и заключена внутри цилиндра $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2(Na)^{-1}$, радиус которого можно сделать как угодно малым за счет выбора N.

2) Линии $v = \text{const}$ однозначно проектируются на ось x_5.

3) Различные линии $u = \text{const}$ не имеют общих точек. Каждая из них проектируется на плоскости (x_1, x_2) и (x_3, x_4) в окружности $x_1^2 + x_2^2 = r_1^2(u)$ и $x_3^2 + x_4^2 = r_2^2(u)$ соответственно, где $r_i(u) = f(u)\varphi_i(u)(\psi_i(u))^{-1}$. Если u_0—не целое, то на линии $u = u_0$ разным значениям v соответствуют разные точки.

4) Если k—целое число, то линии $u = 2k$ представляют собой окружности $x_1^2 + x_2^2 = r_1^2(2k)$, $x_5 = x_5(2k)$, а линии $u = 2k+1$—окружности $x_3^2 + x_4^2 = r_2^2(2k+1)$, $x_5 = x_5(2k+1)$. Эти окружности являются линиями самоприкосновения поверхности. В каждой точке такой окружности счетное число областей поверхности, соответствующих разным значениям v, касаются друг друга, причем имеют бесконечный порядок соприкосновения. Поверхность пересекается с подпространством (x_1, x_2, x_5) по последовательности линий $u = 2k$, с подпространством (x_3, x_4, x_5)—по последовательности линий $u = 2k+1$.

Է. Ռ. ՌՈԶԵՆԴՈՐՆ

$ds^2 = du^2 + f^2(u)\,dv^2$ մետրիկայի իրականացումը հնգաչափ էվկլիդյան տարածության մեջ

Հոդվածում օգտագործելով Դ. Բլանուշի մեթոդը էվկլիդյան հնգաչափ E_5 տարածության մեջ կառուցվում է

$$ds^2 = du^2 + f^2(u)\,dv^2$$

մետրիկա ունեցող մի մակերևույթ, որտեղ $f(u)$—դրական անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիա է $(-\infty, +\infty)$ առանցքի վրա։ Մասնավորապես, եթե $f(u) = \operatorname{ch} u$, ստացվում է Լոբաչևսկու հարթության ներդրումը E_5 տարածության մեջ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Д. Гильберт,* Основания геометрии. [2] *D. Blanusa,* Monatshefte für Mathematik, B. 59, H. 3, 1955, 217—229.