МАТЕМАТИКА

А. А. Гончар

Об одной обратной теореме теории наилучших приближений

(Представлено чл.-корресп. АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 5. I 1960)

1. Рассмотрим непрерывную функцию $f(x)$, определенную на замкнутом множестве F действительной оси; производную функцию $f(x)$ в точке $x \in F$ по множеству F обозначим $f'_F(x)$. Наилучшее приближение в равномерной метрике функции $f(x)$ рациональными функциями (без какого-либо ограничения на расположение полюсов) порядка не выше n будем обозначать $R_n(f; F)$.

Известна (для $F = [0, 1]$ ⁽⁴⁾, для произвольного замкнутого множества F ⁽⁵⁾) следующая теорема (имеющая смысл лишь для множеств положительной меры):

Теорема 1.

Если

$$R_n(f; F) \leq \frac{C}{n^A},$$

где $A > 1$, C не зависит от n , то почти всюду на множестве F существует конечная производная $f'_F(x)$.

Заметим ⁽⁴⁾, что никакая скорость стремления к нулю $R_n(f; F)$ (даже для $F = [0, 1]$) не обеспечивает дифференцируемости функции $f(x)$ на всем множестве F . С другой стороны, при $A = 1$ теорема уже не верна. Е. П. Долженко ⁽³⁾ построил пример функции, непрерывной, но нигде не дифференцируемой на отрезке $[0, 1]$, для которой $R_n(f; [0, 1]) < \frac{1}{n}$ (и даже $R_n(f; [0, 1]) \leq a_n$, лишь бы $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$).

В работе ⁽⁵⁾ показано, что скорость стремления $R_n(f; F)$ к нулю большая, чем $n^{-(1+\epsilon)}$, $\epsilon > 0$ произвольно мало, обеспечивает дополнительную гладкость функции $f(x)$ (в обобщенном смысле) почти всюду на множестве F . В то же время оставался открытым вопрос о том, насколько окончательна в теореме 1 характеристика исключительного множества точек недифференцируемости функции $f(x)$ как множества меры нуль: или а) каковы бы ни были множества Δ меры нуль и функции $\varphi(n) \downarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$ существует функция $f(x)$, недифферен-

цируемая на Δ , причем $R_n(f; F) < \varphi(n)$, или б) дополнительная скорость стремления к нулю $R_n(f; F)$ накладывает дополнительные ограничения на исключительное множество. В настоящей заметке приводятся две теоремы, показывающие, что имеет место второй случай, и устанавливающие зависимость между скоростью стремления к нулю $R_n(f; F)$ и свойствами исключительного множества.

2. Пусть $h(r)$ положительная неубывающая функция положительного аргумента r , мера Хаусдорфа $m(F; h)$ множества F действительной оси определяется следующим образом: покроем множество F системой интервалов Δ_k , длина $\Delta_k = r_k$ так, что $r_k \leq \varepsilon$. Нижнюю грань $\sum_k h(r_k)$ по всевозможным таким покрытиям обозначим через $m_\varepsilon(F; h)$;

$m(F; h) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m_\varepsilon(F; h)$. Если $h(r) = r^\alpha$, $\alpha > 0$, то получаем α -меру Хаусдорфа; в частности, при $h(r) = r$ длину множества по Хаусдорфу, совпадающую для измеримых множеств на прямой с линейной мерой Лебега; если $h(r) = \left(\ln \frac{1}{r}\right)^{-1}$, получаем логарифмическую меру.

Очевидно, если α -мера Хаусдорфа множества F равна нулю, то и α' -мера для всех $\alpha' > \alpha$ также равна нулю; из равенства нулю логарифмической меры следует равенство нулю α -меры при любом α .

Теорема 2.

Если

$$R_n(f; F) < \frac{c}{n^A},$$

где $A > 1$, то каково бы ни было $\varepsilon > 0$, $(A - \varepsilon)^{-1}$ -мера Хаусдорфа множества точек недифференцируемости $f(x)$ равна нулю.

Так как $A > 1$, то при некотором $\varepsilon > 0$ $(A - \varepsilon)^{-1} < 1$ и следовательно теорема 2 содержит в себе теорему 1.

Теорема 3.

Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{R_n(f; F)} = 0,$$

то логарифмическая мера множества точек недифференцируемости $f(x)$ равна нулю.

Заметим, что точки с бесконечной производной включаются в множество недифференцируемости $f(x)$.

Известно ⁽¹⁾, что из равенства нулю логарифмической меры множества следует равенство нулю гармонической меры; по-видимому, если $R_n(f; F) \leq cq^n$, $0 < q < 1$, то множество точек недифференцируемости $f(x)$ имеет гармоническую меру нуль ⁽²⁾, теорема 6.4).

Доказательства теорем 2, 3 основываются, в частности, на следующих леммах об оценке логарифмической производной рациональных функций:

Лемма 1. Пусть $R_n(x)$ рациональная функция порядка n , $0 < \alpha \leq 1$, $\delta > 0$ произвольно малое число. Существует множество $\Delta = \Delta(R_n(x); \delta)$, представляющее из себя сумму конечного числа интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{2n}$, длина $\Delta_k = r_k$, причем

$$\sum_{k=1}^{2n} (r_k)^2 \leq \delta$$

такое, что для $x \notin \Delta$ имеет место оценка

$$|R'_n(x)| \leq C |R_n(x)| \cdot \frac{1}{\delta^{1/2}} \cdot n^{1/2} \ln n,$$

где C не зависит от n и δ .

Лемма 2. Пусть $R_n(x)$ рациональная функция порядка n , $\delta > 0$ произвольно малое число. Существует множество $\Delta = \Delta(R_n(x); \delta)$, представляющее из себя сумму конечного числа интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{2n}$, длина $\Delta_k = r_k$, причем

$$\sum_{k=1}^{2n} \left[\ln \left(\frac{1}{r_k} \right) \right]^{-1} \leq \delta,$$

такое, что для $x \notin \Delta$ имеет место оценка

$$|R'_n(x)| \leq C |R_n(x)| e^{n/\delta} \cdot \ln n,$$

где C абсолютная постоянная.

Замечание 1. Производная $f'_F(x)$ в точках x , в которых она существует, может быть получена почленным дифференцированием последовательности $R_{2^n}(x)$ рациональных функций наилучшего приближения порядка 2^n функции $f(x)$ на множестве F :

$$f'_F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} R'_{2^n}(x).$$

Замечание 2. Приведенные результаты легко перенести на случай приближения функций комплексного переменного на множествах, расположенных на спрямляемых кривых в плоскости комплексного переменного. По-видимому, теоремы 2, 3 справедливы для произвольного замкнутого множества в плоскости комплексного переменного.

Замечание 3. Теорема 2 представляет интерес в частном случае наилучших приближений многочленами на всюду разрывных замкнутых множествах.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

**Հավազույն մոտավորության հետևության վերաբերյալ մի հակադարձ
թեորեմի մասին**

Աշխատանքում դիտարկվում են ուսցիոնալ ֆունկցիաների միջոցով լավագույն մոտավորությունների վերաբերյալ հակադարձ թեորեմներ:

Ապացուցվում է, որ եթե

$$R_n(f; F) < \frac{c}{n^A}, \quad A > 1,$$

ապա $f(x)$ ֆունկցիայի ոչ-դիֆերենցելիության կետերի բազմության $\frac{1}{A-c}$ կարգի խտությունից չափը զրո է, որտեղ $R_n(f; F)$ -ը իրական առանցքի F փակ բազմության վրա ֆունկցիային n կարգի ուսցիոնալ ֆունկցիաներով լավագույն մոտավորությունն է:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{R_n(f; F)} = 0$ դեպքում տեղի ունի համանման թեորեմ ֆունկցիայի ոչ-դիֆերենցելիության լոգարիթմական չափի մասին:

ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ *Р. Неванлинна*, Однозначные аналитические функции, ГТТЛ, 1941. ² *С. Н. Мергелян*, Некоторые вопросы конструктивной теории функций, Труды Математич. института им. В. А. Стеклова, т. 37 (1951). ³ *Е. П. Долженко*, ДАН СССР, т. 126, № 5 (1959). ⁴ *А. А. Гончар*, ДАН СССР, т. 100, № 2 (1955). ⁵ *А. А. Гончар*, ДАН СССР, т. 128, № 1 (1959).