

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

У Жуй-фын

Изгиб призматических стержней в условиях
 неустановившейся ползучести

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 19. III 1960)

На основании опытов К. С. Карапетяна ⁽¹⁾ нелинейную связь между напряжениями и деформациями ползучести, вместо единой кривой, можно выразить двумя прямыми, линиями, названными нами первой и второй областями ползучести. В большинстве случаев, по указанным опытам, за пределом этих двух областей можно взять $\sigma_{R_0} \leq 0,6 R$. В настоящей работе, на основании этого, рассмотрены прямая и обратная задачи изгиба призматического стержня. Прямая задача сводится к решению нелинейного интегрального уравнения типа Вольтерра, которое решается методом линейного решения ⁽²⁾, а обратная задача — к решению двух алгебраических уравнений (18) и (19).

§1. *Постановка задачи и основные уравнения.* 1) Связь между деформациями и напряжениями при нелинейной ползучести.

На основании опытов К. С. Карапетяна ⁽¹⁾, при высоких напряжениях ($\sigma \leq 0,6R$, где R — цилиндрическая прочность бетона) нелинейная зависимость между деформациями и напряжениями ползучести может быть выражена двумя прямыми линиями (фиг. 1), следовательно, общее соотношение между напряжениями и деформациями можно выразить следующими формулами:

$$\varepsilon_i(t) = \frac{\sigma_i(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_i(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[C_1(t, \tau) + \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau \quad (1)$$

при

$$\sigma_i(t) \leq \sigma_{iR_0}(t),$$

и

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(t) = & \frac{\sigma_i(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_i(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[C_2(t, \tau) + \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau + \\ & + \int_{\tau_1}^t \sigma_{iR_0}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[C_2(t, \tau) - C_1(t, \tau) \right] d\tau \end{aligned} \quad (2)$$

при

$$\sigma_i(t) \geq \sigma_{iR_0}(t),$$

где $\epsilon_i(t)$ и $\sigma_i(t)$ — интенсивности деформаций и напряжений, и

$$\epsilon_i(t) = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)}, \quad (3)$$

$$\sigma_i(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}. \quad (4)$$

$C_1(t, \tau)$ и $C_2(t, \tau)$ — соответственные меры ползучести при единичном напряжении в первой и второй областях ползучести, $E(t)$ — модуль упругости, $\sigma_{iR_0}(t) = 0,6 R(t)$, τ_1 — возраст материала в момент приложения нагрузки и t — время.

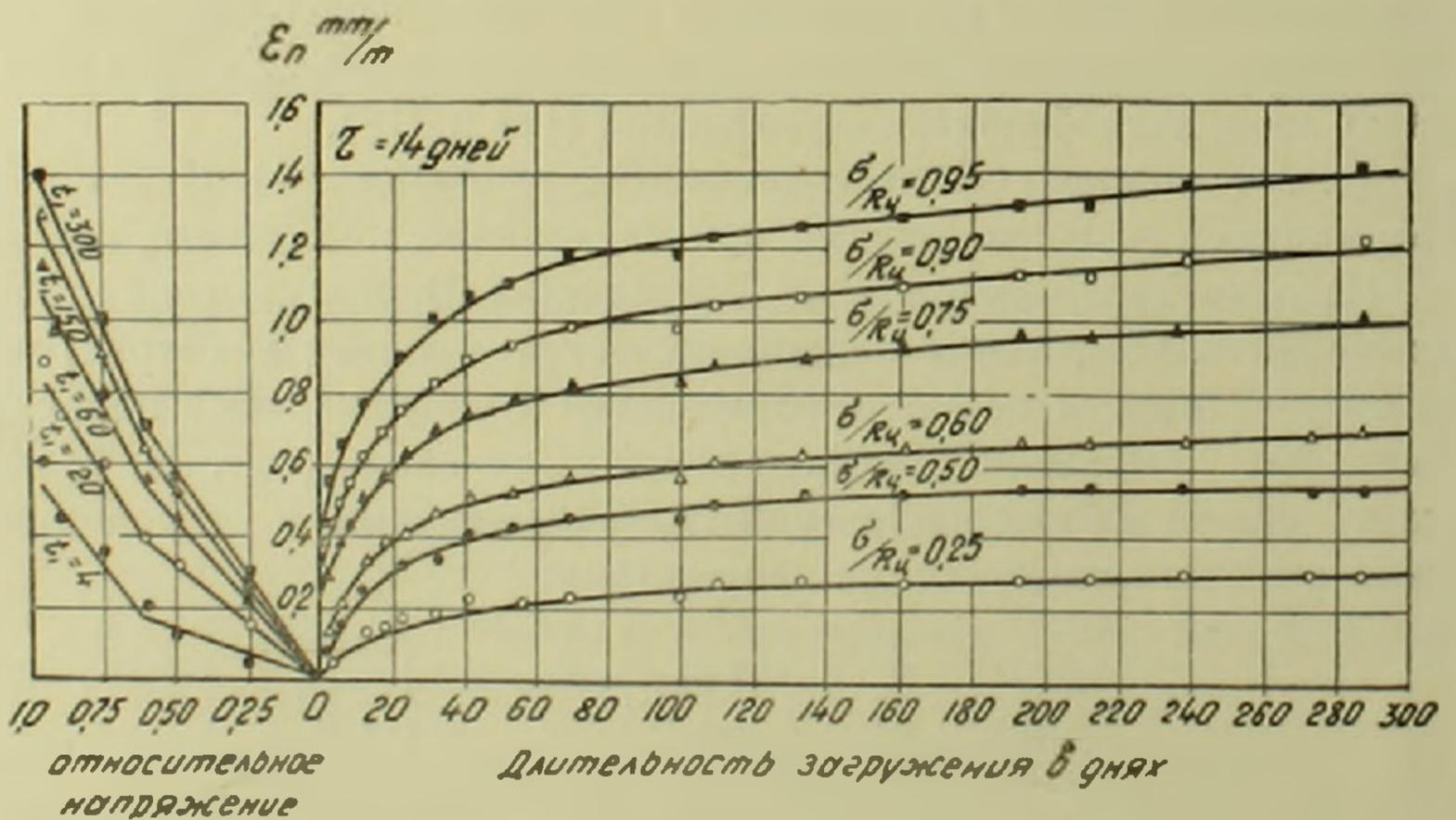
Решая уравнения (1) и (2) относительно $\sigma_i(t)$, получаем

$$\sigma_i(t) = E(t) \epsilon_i(t) + \int_{\tau_1}^t E(\tau) \epsilon_i(\tau) R_1(t, \tau) d\tau, \quad (5)$$

$\sigma_i \leq \sigma_{iR_0}$

$$\sigma_i(t) = E(t) \epsilon_i(t) + \int_{\tau_1}^t E(\tau) \epsilon_i(\tau) R_2(t, \tau) d\tau + B^*(t, \tau_1), \quad (6)$$

$\sigma_i > \sigma_{iR_0}$



Фиг. 1.

где $R_1(t, \tau)$ и $R_2(t, \tau)$ — резольвенты ядра $K_1(t, \tau)$ уравнения (1) и ядра $K_2(t, \tau)$ уравнения (2),

$$K_1(t, \tau) = E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[C_1(t, \tau) + \frac{1}{E(\tau)} \right], \quad (7)$$

$$K_2(t, \tau) = E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[C_2(t, \tau) + \frac{1}{E(\tau)} \right], \quad (8)$$

$B^*(t, \tau_1)$ — известная функция, равная

$$B^*(t, \tau_1) = -E(t) \int_{\tau_1}^t \sigma_{IR_0}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[C_2(t, \tau) - C_1(t, \tau) \right] d\tau - \\ - \int_{\tau_1}^t E(\tau) R_2(t, \tau) d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} \sigma_{IR_0}(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[C_2(\tau, x) - C_1(\tau, x) \right] dx. \quad (9)$$

2) Основные уравнения изгиба призматического стержня.

Рассмотрим призматический стержень, ось которого в начальный момент времени $t = \tau_1$ находится в одной из плоскостей симметрии поперечного сечения.

Пусть геометрические размеры стержня таковы $\left(\frac{2h}{l} \leq \frac{1}{4}\right)$, что

можно принять гипотезу плоских сечений и пренебречь нормальными и касательными напряжениями в плоскостях, параллельных продольной оси, как малыми по сравнению с напряжениями, действующими в поперечных сечениях.

Начало прямоугольной системы координат поместим в центре одного из концевых сечений стержня, направив ось x вдоль его продольной оси, а ось y, z — по осям симметрии поперечного сечения (фиг. 2).

В силу гипотезы плоских сечений и сделанного выше предложения о напряжениях для любого момента времени t будем иметь

$$\epsilon_x = \alpha y, \quad \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{1}{2} \alpha y, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0, \quad (10)$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0, \quad (11)$$

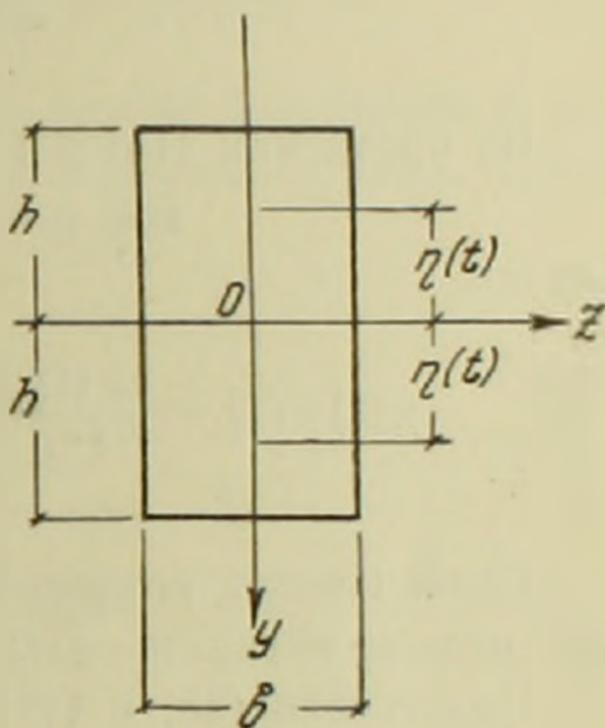
где $\alpha = \alpha(x, t)$ — кривизна оси стержня и

$$\alpha(x, \tau_1) = \frac{M(x)}{EJ}, \quad (12)$$

$$\sigma_x(x, \tau_1) = \frac{M(x) y}{J}. \quad (13)$$

Если в выражении интенсивности напряжений (4) отбросить малую величину $\tau_{xy}(t)$, то будем иметь

$$\epsilon_i(t) = \epsilon_x(t), \quad \sigma_i(t) = \sigma_x(t). \quad (14)$$



Фиг. 2.

Тогда основные уравнения для изгиба призматического стержня примут вид

$$\sigma_x(t) = E(t) \alpha(t) y + \int_{\tau_1}^t y E(\tau) \alpha(\tau) R_1(t, \tau) d\tau, \quad (15)$$

$$\tau_x \leq \sigma_{R_0}$$

$$\sigma_x(t) = E(t) \alpha(t) y + \int_{\tau_1}^t y E(\tau) \alpha(\tau) R_2(t, \tau) d\tau + B^*(t, \tau_1). \quad (16)$$

$$\sigma_x > \sigma_{R_0}$$

Пусть $\eta(t)$ является ординатой, разделяющей первую область ползучести от второй, и в начальный момент времени нагружения имеем

$$\eta(\tau_1) = \frac{\sigma_{R_0} J}{M(x)}, \quad J = \frac{2bh^3}{3}. \quad (17)$$

Из уравнений (10) и (15) по условию при $y = \eta(t)$ $\sigma_x = \sigma_{R_0}$

получим

$$\eta(t) \alpha(t) = \frac{\sigma_{R_0}(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_{R_0}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C_1(t, \tau) d\tau^*. \quad (18)$$

Правая часть уравнения (18) является известной функцией, поэтому можем выразить $\eta(t)$ через $\alpha(t)$ или наоборот.

Подставляя (15) и (16) в уравнение равновесия $\Sigma M_z = 0$ и принимая в сжатой зоне $\sigma_{R_0} = -\sigma_{R_0}$, получим

$$M(t) = \frac{\eta^3(t) J}{h^3} \int_{\tau_1}^t E(\tau) \alpha(\tau) [R_1(t, \tau) - R_2(t, \tau)] +$$

$$+ J \int_{\tau_1}^t E(\tau) \alpha(\tau) R_2(t, \tau) d\tau + JE(t) \alpha(t) + b [h^2 - \eta^2(t)] B^*(t, \tau_1). \quad (19)$$

Уравнение $\Sigma x = 0$ автоматически удовлетворено.

Исключив $\eta(t)$ или $\alpha(t)$ из уравнений (18) и (19), получим нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерра. Таким образом, задача изгиба призматического стержня сводится к решению нелинейного интегрального уравнения типа Вольтерра.

§2. Обратная задача изгиба призматического стержня. 1) Релаксационной задачей мы называем такую задачу, в которой при за-

* Физически условие (18) равносильно условию $\sigma_x(t)|_{y=\eta} = \sigma_x(t)|_{y=\eta}$
(из (15) из (16))

данном начальном деформированном состоянии балки, не изменяемом во времени, требуется определить закон изменения напряжений или нагрузки. При заданном законе изменения деформаций по длине стержня $\alpha(t)$, удовлетворяющем условиям опирания стержня, релаксационная задача, в обобщенном смысле, сводится к так называемой обратной задаче, как следует из соотношений (18) и (19), что обратная задача сводится к решению двух алгебраических уравнений (18) и (19). Отсюда ясно видно, что в обратной задаче учитывать закон изменения модуля мгновенной деформации $E(t)$ и предела прочности $R(t)$ не вызывает никаких затруднений. Здесь только для простоты предположим, что $E(t) = E = \text{const}$ и $\sigma_{R_0}(t) = 0,6 R(t) = \text{const}$, и, в самом деле, тот же опыт К. С. Карапетяна показывает, что

$$R(28) = 0,87 R(\infty), \quad R(80) = 0,95 R(\infty)$$

$$R(120) = 0,97 R(\infty), \quad E(t) = 2100 R(t).$$

Поэтому при достаточно большом возрасте бетона без большой погрешности можно взять $\sigma_{R_0} = 0,6 R = \text{const}$ и $E(t) = E = \text{const}$. Тогда уравнения (18), (19) примут вид

$$\eta(t) = \frac{11}{\alpha(t)} \cdot \frac{\sigma_{R_0}}{E} [1 + EC_1(t, \tau_1)], \quad (20)$$

$$M(t) = \frac{EI}{h^3} \eta^3(t) \int_{\tau_1}^t \alpha(\tau) [R_1(t, \tau) - R_2(t, \tau)] d\tau + \\ + EI \int_{\tau_1}^t \alpha(\tau) R_2(t, \tau) d\tau + El\alpha(t) + b [h^2 - \tau_1^2(t)] B^*(t, \tau_1). \quad (21)$$

Подставляя $\eta(t)$ из (20) в (21), получим

$$M(t) = \frac{I\sigma_{R_0}^3}{h^3} \left(\frac{1}{E\alpha(t)} \right)^2 [1 + EC_1(t, \tau_1)]^3 \int_{\tau_1}^t [R_1(t, \tau) - R_2(t, \tau)] d\tau + \\ + El\alpha(t) \left[1 + \int_{\tau_1}^t R_2(t, \tau) d\tau \right] + b \left\{ h^2 - \left(\frac{\sigma_{R_0}}{E\alpha(t)} \right)^2 [1 + \right. \\ \left. + EC_1(t, \tau_1)]^2 \right\} B^*(t, \tau_1). \quad (22)$$

В случае релаксационной задачи $\alpha(x, \tau_1) = \frac{M(x, \tau_1)}{EI}$ имеем

$$M(t) = \left(\frac{I \sigma_{R_0}}{h} \right)^3 \frac{1}{M^2(\tau_1)} |1 + EC_1(t, \tau_1)|^3 \int_{\tau_1}^t |R_1(t, \tau) - R_2(t, \tau)| d\tau +$$

$$+ M(\tau_1) \left[1 + \int_{\tau_1}^t R_2(t, \tau) d\tau \right] + b \left\{ h^2 - \left(\frac{J \sigma_{R_0}}{M(\tau_1)} \right)^2 \left[1 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + EC_1(t, \tau_1) \right]^2 \right\} B^*(t, \tau_1), \quad (23)$$

и $B^*(\tau_1, \tau_1) = 0$

Как видно из (20), в данном сечении $\eta(t)$ меняется во времени, и как только она дойдет до величины h , то $M(t)$ будет соответствовать случаю, когда все сечение изгибаемого стержня находится в условиях линейной ползучести.

Если предположим, что мера ползучести материала стержня характеризуется зависимостью

$$C_i(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma_i(t-\tau)}], \quad (i = 1, 2), \quad (24)$$

то резольвента ядра $E \frac{\partial C_i(t, \tau)}{\partial \tau}$ имеет вид

$$R_i(t, \tau) = \gamma_i - \xi_i'(\tau) + [\xi_i''(\tau) + \xi_i'^2(\tau) - \gamma_i \xi_i'(\tau)] e^{\xi_i(\tau)} \int_{\tau_1}^t e^{-\xi(x)} dx, \quad (25)$$

где
$$\xi_i(t) = \gamma_i \int_{\tau_1}^t [1 + E\varphi(\tau)] d\tau.$$

2) В качестве приложения рассмотрим пример для старого или быстро стареющего бетона. Пусть

$$C_2(t, \tau) = kC_1(t, \tau) = kc_0 [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}],$$

$$k = 2,5; c_0 = 0,9 \times 10^{-5} \text{ см}^2/\text{кг}; \gamma = 0,026; \tau_1 = 28 \text{ дней};$$

$$E = 2 \times 10^5 \text{ кг/см}^2; \sigma_{R_0} = 0,6 R = 55 \text{ кг/см}^2; 2h = 30 \text{ см};$$

$$b = 20 \text{ см}; M(\tau_1) = 2,4 \times 10^5 \text{ кг. см.}$$

Результаты вычисления приведены в таблице.

t (дней)	28	30	35	39	45	60	90	180	360
$\frac{M(t)}{M(\tau_1)}$	1	0.905	0.737	0.598	0.546	0.419	0.362	0.358	0.358

При $t = 39$ дней, $\tau_1 = h = 15$ см и с момента времени $t = 39$ дней закон изменения $M(t)$ приводится линейным образом.

§3. Прямая задача изгиба призматического стержня. Для простоты предположим, что

$$C_2(t, \tau) = kC_1(t, \tau), \quad (26)$$

или

$$C_2(t, \tau) = \frac{1}{1-\lambda} C_1(t, \tau),$$

где $1 \leq k < \infty$ и $0 \leq \lambda < 1^*$.

При этом связи между напряжениями и деформациями при постоянном E имеют вид

$$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(t)}{E} - \int_{\tau_1}^t \sigma_x(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C_1(t, \tau) d\tau,$$

$$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(t)}{E} - \frac{1}{1-\lambda} \int_{\tau_1}^t \sigma_x(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C_1(t, \tau) d\tau - \frac{\lambda}{1-\lambda} \sigma_{R_0} C_1(t, \tau_1),$$

и

$$\sigma_x(t) = E\varepsilon_x(t) + E \int_{\tau_1}^t \varepsilon_x(\tau) R_1(t, \tau) d\tau,$$

$$\sigma_x(t) = E\varepsilon_x(t) + E \int_{\tau_1}^t \varepsilon_x(\tau) R_2(t, \tau) d\tau + \frac{\lambda}{1-\lambda} E\sigma_{R_0} [C_1(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t C_1(\tau, \tau_1) R_2(t, \tau) d\tau].$$

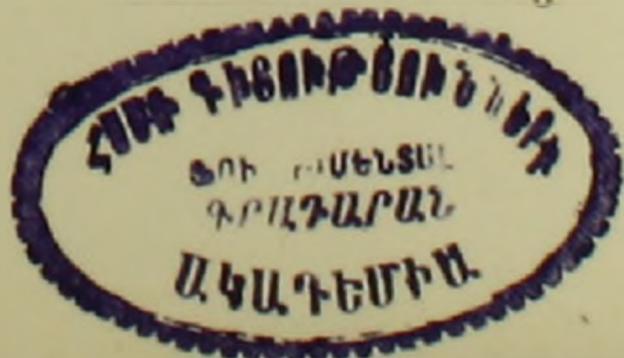
(27)

где $R_1(t, \tau)$, $R_2(t, \tau)$ — резольвенты ядер $E \frac{\partial C_1(t, \tau)}{\partial \tau}$ и $\frac{E}{1-\lambda} \frac{\partial}{\partial \tau} C_1(t, \tau)$.

Подставляя (27) в уравнение равновесия $\Sigma M_x = 0$, учитывая уравнение (20), получим

* По опытам К. С. Каранетяна (1) можно приблизительно считать, что

$$1 < k < 6 \text{ и } 0 < \lambda < \frac{5}{6}$$



$$\begin{aligned}
& a^3(t) \left\{ M - \frac{\lambda b}{1-\lambda} E\sigma_{R_0} h^2 \left[C_1(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t C_1(\tau, \tau_1) R_2(t, \tau) d\tau \right] \right\} = \\
& = EI a^4(t) + EI a^3(t) \int_{\tau_1}^t a(\tau) R_2(t, \tau) d\tau + \frac{EI}{h^3} \psi^3(t) \int_{\tau_1}^t a(\tau) [R_1(t, \tau) - \\
& \quad - R_2(t, \tau)] d\tau - \frac{\lambda b}{1-\lambda} E\sigma_{R_0} \psi^2(t) a(t) \left[C_1(t, \tau_1) + \right. \\
& \quad \left. + \int_{\tau_1}^t C_1(\tau, \tau_1) R_2(t, \tau) d\tau \right], \tag{28}
\end{aligned}$$

где $\psi(t) = a(t) \tau_1(t)$, известная функция определяется формулой (20).
Замечая, что

$$\frac{1}{1-\lambda} = 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots, \tag{29}$$

будем искать решение (28) для $a(t)$ в форме ряда

$$a(t) = a_0(t) + \lambda a_1(t) + \lambda^2 a_2(t) + \dots, \tag{30}$$

что соответствует методу линейного решения, развитого в работе (2).

Для простоты выкладки ограничимся двумя первыми приближениями. Из соотношений (28), (29) и (30), принимая во внимание что при $\lambda = 0$ $R_1(t, \tau) = R_2(t, \tau)$, через некоторые преобразования получаем

$$a_0(t) + \int_{\tau_1}^t a_0(\tau) R_1(t, \tau) d\tau = \frac{M}{EI}, \tag{31}$$

$$a_1(t) + \int_{\tau_1}^t a_1(\tau) K(t, \tau) d\tau = f_1(t, \tau_1), \tag{32}$$

где

$$K(t, \tau) = \frac{EI a_0(t) R_2(t, \tau) + \frac{2Eb}{3} \left(\frac{\sigma_{R_0} I}{M} \right)^3 a_0(t) [R_1(t, \tau) - R_2(t, \tau)]}{EI \left\{ 3 \int_{\tau_1}^t a_0(\tau) [R_1(t, \tau) - R_2(t, \tau)] d\tau - a_0(t) \right\}}, \tag{33}$$

$$f_1(t, \tau_1) = \frac{a_0(t) Eb\sigma_{R_0} \left(h^2 - \frac{\sigma_{R_0}^2 I^2}{M^2} \right) \left[C_1(t, \tau) + \int_{\tau_1}^t C_1(\tau, \tau_1) R_2(t, \tau) d\tau \right]}{EI \left\{ 3 \int_{\tau_1}^t a_0(\tau) [R_1(t, \tau) - R_2(t, \tau)] d\tau - a_0(t) \right\}} \tag{34}$$

Решая (31), получим

$$\alpha_0(t) = \frac{M}{EI} [1 + EC_1(t, \tau_1)]. \quad (35)$$

Подставляя $\alpha_0(t)$ из (35) в (33) и (34), решая (32), получим

$$\alpha_1(t) = f_1(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t f_1(\tau, \tau_1) \Gamma(t, \tau) d\tau, \quad (36)$$

где $\Gamma(t, \tau)$ — резольвента ядра $K(t, \tau)$.

Аналогичным путем можно определить $\alpha_2(t)$ и т. д.

После нахождения $\alpha(t)$ по уравнениям (20) и (27), определим закон изменения $\eta(t)$ и напряжений.

При практическом вычислении при любом ядре, уравнение (32) легко интегрировать при помощи численного метода Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова (3).

Отметим, что если возьмем только учет линейной ползучести, т. е. при $\lambda = 0$, то из (20), (35) и (17) легко видеть

$$\eta(t) = \frac{\sigma_{R_0} l}{M} = \eta(\tau_1).$$

Это означает, что в случае линейной ползучести напряженное состояние балки останется неизменным во времени, а меняется только деформация.

Прогиб балки $v(t)$ определяется следующим образом:

$$\alpha(t, x) = \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2},$$

$$v(t, x) = \int_0^x \int_0^x \alpha(t, x) dx dx + C_1 x + C_2. \quad (37)$$

Здесь C_1 и C_2 — интегральные постоянные, определяемые условиями опирания балки.

По изложенному в §1 и §2, нам кажется, что мы пришли к такому выводу, что для решения обратной задачи, например, для расчета потери напряжения предварительно напряженных железобетонных элементов с учетом нелинейной ползучести, данный метод имеет более простой вид, чем другие.

В заключение автор пользуется случаем выразить искреннюю благодарность Н. Х. Арутюняну за постановку задачи и ряд ценных указаний при выполнении настоящей работы.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Պրիզմատիկ ձողերի ծուռմբ վկայուհացված սուղի պայմաններում

Հիմնվելով Կ. Ս. Կարապետյանի ⁽¹⁾ փորձերի վրա լարումների և դեֆորմացիաների ոչ գծային կապը արտահայտված է երկու ուղիղների միջոցով:

Օգտագործելով այդպիսի դիագրամա, ուսումնասիրվում է պրիզմատիկ ձողի ծուման ուղիղ և հակադարձ խնդիրը: Առաջին դեպքում խնդիրը բերվում է Վոլտերի տիպի ոչ գծային ինտեգրալ հավասարման, որը լուծվում է այսպես կոչված «գծային լուծման» մեթոդով ⁽²⁾: Երկրորդ դեպքում խնդիրը հանգում է հանրահալվական հավասարումների:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ К. С. Карапетян, Изв. АН Арм ССР (серия физ.-мат. наук), том XII, №4 (1959). ² Р. А. Александрян, Н. Х. Арутюнян, М. М. Манукян, ПММ, №6, 1958.
³ Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, 1949.