ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXX 1960 3

МАТЕМАТИКА

А. А. Талалян

О предельных функциях рядов по базисам пространства L_p

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 18. I 1960)

В настоящей заметке мы сформулируем некоторые теоремы о пределах неопределенности по мере и о предельных функциях рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \tag{1}$$

где $\{\varphi_n(x)\}$ есть любой нормированный базис пространства $L_p[0,1]$, $p>1$.

Эти теоремы являются обобщениями теорем Д. Е. Меньшова, доказанных в том частном случае, когда базис $\{\varphi_n(x)\}$ совпадает с ортогональным и нормированным базисом тригонометрической системы ([1-3])

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \cdots, \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \cdots \tag{2}$$

Основным средством при доказательстве таких теорем для рядов вида (1) является следующая лемма, которая следует из леммы 2 работы ([4]).

Лемма А. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — нормированный базис пространства $L_p[0, 1]$, $p>1$.*

Пусть, далее, $f(x)$ произвольная, почти везде конечная измеримая функция, определенная на $[0, 1]$.

Тогда для любого положительного числа ε и натурального числа n можно определить измеримое множество e_0 и действительные числа $a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots, a_m$, удовлетворяющие следующим условиям

α) $e_0 \subset [0, 1]$, $\quad \operatorname{mes} e_0 \leqslant \varepsilon$

β) $|a_k| \leqslant \varepsilon$, $\quad n+1 \leqslant k \leqslant m$

γ) $\left\| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{ce_0} \leqslant \varepsilon$, где $ce_0 = [0, 1] - e_0$*

* Мы обозначаем

$$\|g(x)\|_E = \left(\int |g(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

$$\text{б)} \left\| \sum_{k=n+1}^{s} a_k \varphi_k(x) \right\|_e \leqslant \varepsilon + \|f(x)\|_e, \; n+1 \leqslant s \leqslant m,$$

где e произвольное измеримое подмножество множества $[0, 1] - e_0$.

Как следствие леммы А, можно доказать следующую лемму.

Лемма В. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ — *нормированный базис пространства* $L_p[0, 1]$, $p > 1$.

Для любой почти везде конечной измеримой функции $f(x)$, *для любого положительного числа* $\sigma < 1$ *и для произвольного натурального числа* L *можно определить многочлен*

$$H(x) = \sum_{j=L+1}^{L'} a_j \varphi_j(x) \tag{3}$$

числа γ_n *и измеримые множества* $E_n, Q_n, n = L+1, L+2, \ldots, L'$, *которые удовлетворяют следующим условиям*

$$1) \; \operatorname{mes} E_n \leqslant \sigma, \; E_n \subset [0, 1] \quad (L < n < L')$$

$$2) \; Q_n \subset Q_{n+1} \subset [0, 1] \quad (L < n < L')$$

$$3) \left| \sum_{j=L+1}^{n} a_j \varphi_j(x) - f(x) \right| < \sigma \quad (x \in Q_n - E_n, \; L < n < L')$$

$$4) \left| \sum_{j=L+1}^{n} a_j \varphi_j(x) \right| < \sigma$$

$$(x \in [0,1] - Q_n - E_n; \; L < n \leqslant L'$$

$$5) \; \gamma_{L'} = 1, \quad 0 < \gamma_n \leqslant 1 \quad (L < n \leqslant L')$$

$$6) \; |a_j| \leqslant \sigma \quad (L < j \leqslant L')$$

$$7) \left| \frac{\operatorname{mes}(Q_n \cdot [c, d])}{d - c} - \gamma_n \right| < \sigma \quad (L < n \leqslant L')$$

для любого сегмента $[c, d]$ *такого, что*

$$d - c \geqslant \sigma, \quad [c, d] \subset [0, 1].$$

Формулировка леммы (В) та же самая, что и формулировка леммы Д. Е. Меньшова ([1] лемма 4.3, стр. 41), при этом лемма В несколько сильнее, так как в ее формулировке $f(x)$ произвольная почти везде конечная измеримая функция, а в указанной лемме работы [1] предполагается, что $f(x)$ непрерывная функция.

Из сказанного вытекает, что все те свойства тригонометрических рядов, которые получаются как следствие леммы 4.3 работы [1], имеют место также для любых базисов $\{\varphi_n(x)\}$ пространства $L_p[0,1]$, $p>1$.

В частности справедлива следующая

Лемма С. Пусть даны измеримые функции $F_0(x)$, $F_1(x)$ *и* $f_m(x)$, $m=1,2,\ldots$; *определенные почти всюду на сегменте* $[0,1]$, *причем*

$$-F_1(x)\leqslant f_m(x)\leqslant F_0(x)\quad(m=1,2,\ldots.) \tag{4}$$

Тогда для любого нормированного базиса $\{\varphi_n(x)\}$ *пространства* $L_p[0,1]$, $p>1$ *существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x), \tag{5}$$

функции $h_m(x), m=1,2,\ldots$; *непрерывные на* $[0,1]$ *и натуральные числа* ν_m, $m=1,2,\ldots$, *которые обладают следующими свойствами:*

1) *Последовательности функций* $f_m(x)$, $m=1,2,\ldots$ *и* $h_m(x)$, $m=1,2,\ldots$, *являются равностепенно сходящимися почти всюду на* $[0,1]$ (определение в § 3 работы [1]).

2)
$$\nu_m<\nu_{m+1}\quad(m=1,2,\ldots.) \tag{6}$$

$$\text{и}\ \lim_{m\to\infty}[h_m(x)-S_{\nu_m}(x)]=0 \tag{7}$$

почти всюду на $[0,1]$, *где*

$$S_n(x)=\sum_{j=1}^{n} a_j\varphi_j(x),\quad(n=1,2,\ldots.), \tag{8}$$

3) *верхний и нижний пределы по мере на* $[0,1]$ *последовательности*

$$S_1(x),S_2(x),\ldots.,S_n(x),\ldots \tag{9}$$

равны соответственно $F_0(x)$ и $-F_1(x)$
(определение верхнего и нижнего пределов по мере, см. [1], стр. 4).

4) *для любой возрастающей последовательности натуральных чисел* n_k, $k=1,2,\cdots$, *или верхний и нижний пределы по мере на* $[0,1]$ *последовательности* $S_{n_k}(x)$, $k=1,2,\cdots$, *равны, соответственно,* $F_0(x)$ и $-F_1(x)$, *или можно определить неубывающую последовательность натуральных чисел* p_k, $k=1,2,\cdots$, *таких, что*

$$\lim_{k\to\infty}p_k=\infty \tag{10}$$

и последовательность функции $h_{p_k}(x)-S_{n_k}(x)$, $k=1,2,\cdots$ *сходится по мере к нулю на* $[0,1]$

$$5)\ \lim_{n\to\infty}a_n=0. \tag{11}$$

Аналогичная лемма была доказана Д. Е. Меньшовым для тригонометрической системы как следствие леммы 4.3 работы [1] (лемма 5, 2 работы ([1])), поэтому лемма C получится как следствие леммы B.

Для любого нормированного базиса $\{\varphi_n(x)\}$ пространства $L_p[0, 1]$, $p>1$, будут справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $M=\{\varphi(x, E)\}$ есть непустое множество функций $\varphi(x, E)$, каждая из которых определена почти всюду на соответствующем множестве E, причем*

$$\operatorname{mes} E>0, \quad E\subset[0, 1] \tag{12}$$

и пусть $F(x)$ и $G(x)$ измеримые функции, определенные на $[0, 1]$ и такие, что

$$G(x)\leqslant F(x) \tag{13}$$

почти всюду на этом сегменте.

Предположим, что множество M и функции $G(x)$ и $F(x)$ удовлетворяют следующим условиям: α^0. M замкнуто в узком смысле β^0. если $\varphi(x, E)\in M$, то $\varphi(x, E)$ измерима на E и

$$G(x)\leqslant\varphi(x, E)\leqslant F(x) \tag{14}$$

почти всюду на этом множестве;

γ^0, *если $\varphi(x, E)\in M$ и если*

$$E_0=E+E[F(x)=G(x)], \tag{15}$$

то функция $\varphi_0(x, E_0)$, определенная из равенства

$$\varphi_0(x, E_0)=\begin{cases}\varphi(x, E) & \text{при } x\in E\\ F(x) & \text{при } x\in E_0-E,\end{cases} \tag{16}$$

также принадлежит множеству M.

При этих условиях для любого нормированного базиса $\{\varphi_n(x)\}$ пространства $L_p[0, 1], p>1$, существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x), \tag{17}$$

обладающий следующими свойствами:

A°. *M есть множество всех предельных функций ряда* (17).

B°. *$F(x)$* и *$G(x)$ являются соответственно верхним и нижним пределами по мере на $[0, 1]$ ряда* (17)

C°.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0$$

Теорема 2. *Пусть измеримые функции $F(x)$ и $G(x)$ определены и удовлетворяют неравенству* (13) *почти всюду на сегменте* $[0, 1]$.

Тогда для любого нормированного базиса $\{\varphi_n(x)\}$ пространства $L_p[0, 1]$, $p>1$ существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x), \tag{18}$$

такой, что для любой возрастающей последовательности натуральных чисел

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < , \ldots \tag{19}$$

$F(x)$ и $G(x)$ являются соответственно верхним и нижним пределами по мере на $[0, 1]$ последовательности функций

$$S_{n_1}(x), S_{n_2}(x), \ldots, S_{n_k}(x), \ldots \tag{20}$$

где

$$S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j(x).$$

Теоремы 1 и 2 являются обобщениями теорем Д. Е. Меньшова, доказанных для тригонометрической системы в работах [2] и [3]. Они справедливы в силу леммы С, так как доказательство Д. Е. Меньшова соответственных теорем для тригонометрической системы опирается только на лемму 5.2 работы [1], формулировка которой отличается от формулировки леммы С только тем, что в ней вместо произвольного базиса $\{\varphi_n(x)\}$ фигурирует тригонометрическая система.

Можно доказать также следующую теорему.

Теорема 3. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ нормированный базис пространства $L_p[0, 1]$, $p > 1$.

Существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \tag{21}$$

где

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{22}$$

такой, что для любого множества $M = \{\varphi(x, E)\}$ и функций $F(x)$ и $G(x)$, удовлетворяющих условиям α°, β°, γ°, фигурирующих в формулировке теоремы 1, некоторый ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu_k} a_{\nu_k}(x), \tag{23}$$

полученный перестановкой членов ряда (21), будет обладать следующими свойствами.

A^{00} *M есть множество всех предельных функций ряда (23).*

B^{00}. *$F(x)$ и $G(x)$ являются соответственно верхним и нижним пределом по мере на $[0, 1]$ ряда (23).*

Институт метематики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

L_p տարածության բազիսների շարքերի սահմանային ֆունկցիաների մասին

Ներկա աշխատանքում բերված է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ. *Դիցուք* $M=\{\varphi(x,E)\}$ — *ն* $\varphi(x,E)$ *ֆունկցիաների ոչ դատարկ բազմություն է, որոնցից յուրաքանչյուրը որոշված է համարյա ամենուրեք համապատասխան* E *բազմության վրա, ընդ որում*

$$\text{mes}\, E > 0,\ E \subset [0,1] \tag{1}$$

և դիցուք $F(x)$, *և* $G(x)$ *չափելի ֆունկցիաները որոշված են* $[0,1]$ *հատվածի վրա և բավարարում են*

$$G(x) < F(x)$$

անհավասարությանը համարյա ամենուրեք այդ հատվածի վրա։

Ենթադրենք, որ M *բազմությունը և* $G(x), F(x)$ *ֆունկցիաները բավարարում են հետևյալ պայմաններին։*

α. M — *բազմությունը փակ է նեղ իմաստով.*

β. *եթե* $\varphi(x,E)\in M$, *ապա* $\varphi(x,E)$ — *ն չափելի է* E — *ի վրա և*

$$G(x) \leqslant \varphi(x,E) \leqslant F(x) \tag{2}$$

համարյա ամենուրեք այդ բազմության վրա

γ. *եթե* $\varphi(x,E)\in M$ *և եթե*

$$E_0 = E + E[F(x) = G(x)] \tag{3}$$

ապա՝

$$\varphi_0(x,E_0)=\begin{cases}\varphi(x,E), & x\in E\\ F(x), & x\in E_0-E\end{cases} \tag{4}$$

հավասարությամբ որոշված $\varphi_0(x,E_0)$ *ֆունկցիան նույնպես պատկանում է* M *բազմությանը։*

Այդ պայմանների դեպքում $L_p[0,1]$ *տարածության ցանկացած նորմավորված* $\{\varphi(x)\}$ *բազիսի համար գոյություն ունի*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{5}$$

շարք, որը ունի հետևյալ հատկությունները.

A. M — *ը հանդիսանում է (5) շարքի բոլոր սահմանային ֆունկցիաների բազմությունը։*

B. $F(x)$ *և* $G(x)$ *ֆունկցիաները հանդիսանում են (5) շարքի համար համապատասխանաբար վերին և ստորին սահմանները ըստ չափի* $[0,1]$ *հատվածի վրա։*

C. $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Д. Е. Меньшов*, О сходимости по мере тригонометрических рядов. Труды математического института им. Стеклова, XXXII (1950). [2] *Д. Е. Меньшов*, О пределах неопределенности по мере частных сумм тригонометрических рядов. Мат. сборник, т. 34 (76): 3, стр. 557 (1954). [3] *Д. Е. Меньшов*, О предельных функциях тригонометрического ряда. Труды Московского математичес. общества, т. 7, 1958. [4] *А. А. Талалян*, Известия АН АрмССР (серия физико-математическая), том X, №1 (1957).