ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXX 1960 2

МЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

Взрыв в пластическом газе

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 5. VI 1959)

Рассматривается взрыв в жидкости (или грунте), именуемой пластическим газом. Уравнение состояния пластического газа при динамических нагрузках предложено Х. А. Рахматулиным и имеет вид:

$$P - P_0 = A(S)(\rho^n - \rho_0^n) \qquad \text{для} \qquad \frac{dP}{dt} > 0, \tag{1}$$

$$\rho = \rho_1 \qquad \text{для} \qquad \frac{dP}{dt} < 0, \tag{2}$$

где P_0 и ρ_0—начальные давление и плотность грунта, ρ_1—постоянная для данной частицы, S—энтропия, t—время.

В дальнейшем рассмотрим автомодельные ([1]) движения. Легко видеть, что в тех случаях, когда (1) (нагрузка) дает автомодельное движение, тогда и все уравнение состояния (1) и (2) дает автомодельность. Это следует из того, что (2) не дает новых существенных констант ([1]). Очевидно, например, для точечного взрыва давление в частице после прохождения волны падает; состояние грунта за ударной волной опишется (2) (разгрузка).

Уравнения движения, неразрывности и несжимаемости в эйлеровых координатах для сферического взрыва имеют вид:

$$\left|\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} \\ &\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} = 0 \\ &\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial r} = 0, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

где r—координата от места взрыва, u—радиальная скорость. Если рассматривать автомодельные движения жидкости, имеем

$$\rho = \overline{\rho_1}\,\overline{\rho}(\xi), \tag{4}$$

где $\xi = \dfrac{r}{t^\alpha}$, α и $\overline{\rho}$—некоторые постоянные ([1]); например, для точечного взрыва в газе имеем

$$\alpha = \frac{2}{5}, \quad \overline{\rho_1} = \rho_1;$$

энергию взрыва обозначим E_0.

Из последнего уравнения в (3) получим для автомодельного случая

$$\frac{d\bar{\rho}}{d\xi}\left(\alpha - \frac{ut}{r}\right) = 0. \tag{5}$$

Поскольку $u = \frac{\alpha r}{t}$ неудовлетворяет второму уравнению, из (3) имеем

$\frac{d\bar{\rho}}{d\xi} = 0$ или $\bar{\rho} = \text{const}$ для всей жидкости.

Таким образом для автомодельных движений из условия постоянства плотности в частице вытекает постоянство во всей возмущенной массе.

Итак, $\rho = \overline{\rho_1} = \rho_1$, где ρ_1 — плотность за ударной волной. Поскольку на самой ударной волне происходит нагрузка, нужно при написании условий на ней пользоваться (1). В этом случае, если пренебречь ρ_0, имеем для сильных волн

$$u = \rho_0 D\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - 1\right); \quad P = \rho_0 D^2 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right); \quad \frac{\rho_1}{\rho_0} = k, \tag{7}$$

где третье уравнение в (7) представляет асимптоту Гюгонио для жидкости (3), k—константа, определяемая показателем h. Например, для $h = 3$ получим $k = 2{,}4$.

Из второго уравнения (3) имеем:

$$u = \frac{C(t)}{r^2},$$

учитывая размерность u, можно записать еще

$$u = \frac{r}{t}\bar{u} = \lambda_1 \left(\frac{E_0}{\rho_0}\right)^{3/5} \frac{r}{t} \frac{1}{\xi^3}, \tag{8}$$

постоянная λ_1 не имеет размерности.

Из первого уравнения (7) имеем

$$\lambda_1 = \rho_0 \alpha \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - 1\right)\left(\frac{\rho_0}{E_0}\right)^{3/5}. \tag{9}$$

Если подставить соотношение (8) в первое уравнение (3), получим, что при $r = 0$, $P = -\infty$.

Таким образом в центре возникает разрежение (1) и давление обращается в нуль на некоторой сфере радиуса $r^* = \gamma t^\alpha \left(\frac{E_0}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{5}}$.

Полная энергия возмущенного движения (за ударной волной) постоянна во времени и заданная:

$$E_0 = 4\pi \int\limits_{r^*}^{R(t)} \left(E + \frac{u^2}{2}\right) \rho_1 r^2 \, dr, \tag{10}$$

где $r = R(t)$ координата ударной волны $R(t) = C\left(\frac{E_0}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{5}} t^{\alpha}$, E — внутренняя энергия частицы жидкости. Из размерности E следует

$$E = \frac{r^2}{t^2} \overline{E}(\xi), \tag{11}$$

причем $\overline{E}(\xi)$ определяется из условия адиабатичности и первого начала термодинамики:

$$\frac{dE}{dt} = -T\frac{dS}{dt} = 0, \tag{12}$$

где T — температура жидкости.

Подставляя (11) в (12), имеем:

$$\overline{E}'(\xi)\, \xi\, (\overline{u} - \alpha) = 2\overline{E}(\xi)\,(1 - \overline{u}).$$

Решение этого уравнения после вычисления интеграла и с учетом (8) запишется

$$\overline{E}(\xi) = K \frac{1}{\eta^2 (\lambda_1 - \alpha\eta^3)^{\frac{2}{3}(1-\alpha)}}, \tag{13}$$

здесь K постоянная; $\eta = \xi\left(\frac{\rho_0}{E_0}\right)^{\frac{1}{5}}$.

Если подставить все эти величины в (10), получим $\alpha = \frac{2}{5}$.

Теперь уравнение (10) запишется

$$1 = 4\pi \int\limits_{\gamma}^{c} \left[K \frac{1}{\eta^2 (\lambda_1 - \alpha\eta^3)^{\frac{2}{3}(1-\alpha)}} + \frac{\lambda_1^2}{2} \frac{1}{\eta^6} \right] \eta^4 \, d\eta =$$

$$= 4\pi \frac{\alpha}{2\alpha + 1} \left[(\lambda_1 - \alpha\gamma^3)^{\frac{2\alpha+1}{3}} - (\lambda_1 - \alpha C^3)^{\frac{2\alpha+1}{3}} \right] + 2\pi\lambda_1^2 \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{C}\right). \tag{14}$$

Для определения постоянной K в выражении энергии приравняем (11) к значению энергии за ударной волной для упругой жидкости, пользуясь уравнением (1) и (3).

Поскольку еще на ударной волне $r = C\left(\frac{E_0}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}}$, найдем:

$$\frac{K}{(\lambda_1 - \alpha c^3)^{\frac{2}{3}(1-\alpha)}} = \rho_0 \alpha^2 C^2 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right)\left[\frac{1}{n-1}\,\frac{\rho_1^{n-1} - \rho_0^{n-1}}{\rho_1^n - \rho_0^n} - \frac{\rho_0^n\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1}\right)}{\rho_1^n - \rho_0^n}\right]. \qquad (15)$$

Из первого уравнение (3) после интегрирования получим

$$P = -\rho_1 \frac{r^2}{t^2}\lambda_1 \left(\frac{\lambda_1}{2}\frac{1}{\eta^6} - \frac{1}{5}\frac{1}{\eta^3}\right) + B\rho_1 \frac{r^2}{t^2}\frac{1}{\eta^2}, \qquad (16)$$

здесь B безразмерная постоянная.

Условия равенства нулю давления на сфере $r = r^*$ и второе уравнение (7) дают:

$$\frac{1}{5}\frac{1}{\gamma^3} - \lambda_1 \frac{1}{2}\frac{1}{\gamma^6} + B\frac{1}{\gamma^2} = 0 \qquad (17)$$

$$\rho_1 \lambda_1 \left(\frac{1}{5}\frac{1}{C^3} - \frac{\lambda_1}{2}\frac{1}{C^6}\right) + \rho_1 B \frac{1}{C^2} = \rho_0\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right)\alpha^2. \qquad (18)$$

Таким образом, чтоб завершить решение задачи, нужно определить постоянные, не имеющие размерности K, C, λ_1, γ и B из системы конечных уравнений: (9), (14), (15), (17), (18).

Очевидно закон движения ударной волны для пластического газа постоянным множителем отличается от закона для идеального газа.

Задача о сферическом взрыве с постоянной плотностью решена А. Я. Сагомоняном [2]. Из изложенного видно, что это решение является строгим для автомодельных случаев.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

Պայթյունը պլաստիկական գազում

Պայթյունը պլաստիկական գազում դիտարկվում է ավտոմոդելային պայթյունը պլաստիկական գազ կոչվող հեղուկում:

Ցույց է տրված, որ նրա վիճակի հավասարումը, առաջադրված Ռախմատուլինի կողմից, պահպանում է շարժման ավտոմոդելայնությունը:

Քննարկվում է հարվածային ալիքի շարժման օրենքը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. И. Седов.* Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат. М., 1957. [2] *А. Я. Сагомонян.* Докторская диссертация, МГУ. [3] *К. П. Станюкович.* Неустановившиеся движения сплошной среды, Гостехиздат, 1954.