ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXX 1960 2

МАТЕМАТИКА

С. Е. Карапетян

Квадрики конгруэнций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 25. XII 1960)

1. Вопрос о квадриках, принадлежащих конгруэнции, являлся предметом исследований многих авторов. Наиболее существенные результаты были получены в работах Егорова ([1]), Финикова ([2,3]) и Гамбье ([4]). В заметке ([10]) была рассмотрена конгруэнция, гармонические линейчатые поверхности которой являлись квадриками.

В настоящей работе получается (инвариантное, относительно тетраэдра первого порядка конгруэнции) необходимое и достаточное условие конгруэнции, расслаивающейся на квадрики, и в связи с этим доказывается несколько теорем. В последнем пункте получена соприкасающаяся линейная конгруэнция произвольной линейчатой поверхности конгруэнции, которая очень тесно связана с остальными результатами. В работе применен метод внешних форм Картана ([9]).

2. Инфинитезимальные перемещения тетраэдра $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ в проективном пространстве определяются следующей системой дифференциальных уравнений

$$dA_i = \omega_i^k A_k,\quad i, j, k = 1, 2, 3, 4,$$

где ω_i^k — линейные дифференциальные формы, связанные структурными уравнениями проективного пространства $D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k]$.

Семейство тетраэдров 1-го порядка, присоединенное к конгруэнции $(A_1\ A_2)$, выделяется дифференциальными уравнениями ([5])

$$\begin{gathered}
\omega_1^4 = 0,\quad \omega_2^3 = 0,\quad \omega_3^4 = \alpha\omega_1^3 - \beta\omega_2^4,\quad \omega_1^2 = \beta\omega_1^3 + \gamma\omega_2^4\\
\Delta\alpha = \alpha_1\omega_1^3 - \beta_1\omega_2^4,\quad \Delta\beta = \alpha\beta_1\omega_1^3 + \gamma\beta_2\omega_2^4,\quad \Delta\gamma = \beta_2\omega_1^3 + \gamma_2\omega_2^4\\
\Delta\alpha_1 = \alpha_{11}\omega_1^3 - \beta_{11}\omega_2^4,\quad \Delta\beta_1 = \beta_{11}\omega_1^3 + \gamma\beta_{12}\omega_2^4,\quad \Delta\beta_2 = \alpha\beta_{12}\omega_1^3 + \beta_{22}\omega_2^4,\\
\Delta\gamma_2 = \beta_{22}\omega_1^3 + \gamma_{22}\omega_2^4,\quad \Delta\beta_{11} = \beta_{111}\omega_1^3 + \gamma\beta_{121}\omega_2^4,\quad \Delta\beta_{22} = \alpha\beta_{122}\omega_1^3 + \beta_{222}\omega_2^4,
\end{gathered} \tag{A}$$

и аналогичными уравнениями, полученными из (A) заменой указателей 1 на 2, 3 на 4 и добавлением штрихов при коэффициентах α, β, γ с любыми указателями.

3. В заметке ([6]) были получены квадрики Ли для всех линейчатых поверхностей $\omega_2^4 = \lambda \omega_1^3$ конгруэнции. Одна серия прямолинейных образующих этих квадрик определяется тремя линейными комплексами $[12]$, $d\,[12]$, $d^2\,[12] \mod (\omega_2^4 - \lambda \omega_1^3)$ или тремя точками в пятимерном проективном пространстве P_5:

$$\begin{aligned} a_1 = [12],\ a_2 = [14] - [23],\ a_3 = 2\lambda\,[34] + \lambda\,(\lambda_1 + \lambda\lambda_2)\,[14] + \\ + (\lambda^2 \alpha' - 2\lambda\beta' - \gamma')\,[13] + (-\lambda^2\gamma' - 2\gamma\beta + \alpha)\,[42], \end{aligned} \tag{1}$$

где $[ik]$ — аналитическая прямая $(A_i\, A_k)$, а

$$d \ln \lambda + \omega_1^1 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \lambda_1\, \omega_1^3 + \lambda_2\, \omega_2^4. \tag{1'}$$

Линейчатая поверхность $\omega_2^4 = \lambda\omega_1^3$ будет квадрикой тогда и только тогда, когда

$$([12],\, d\,[12],\, d^2\,[12],\, d^3\,[12]) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \omega_2^4 - \lambda\omega_1^3),$$

которое в силу значений (1) приведет к трем равенствам:

$$\frac{3}{2}\,(\lambda_1 + \lambda\lambda_2)\,(\alpha'\lambda^2 + \gamma') - \gamma'\gamma_1' + \alpha'\alpha_2'\lambda^3 - 3\lambda\,(\gamma'\beta_1' + \lambda\alpha'\beta_2') = 0,$$

$$\frac{3}{2}\,(\lambda_1 + \lambda\lambda_2)\,(\gamma\lambda^2 + \alpha) - \alpha\alpha_1 + \gamma\gamma_2\lambda^3 + 3\lambda\,(\alpha\beta_1 + \lambda\gamma\beta_2) = 0,$$

$$\begin{aligned} \lambda\,(\lambda_{11} + \lambda\lambda_{12}) + \lambda^2\,(\lambda_{21} + \lambda\lambda_{22}) + \frac{1}{2}\,\lambda(\lambda^2\lambda_2^2 - \lambda_1^2) + \\ + (\gamma\lambda^2 + \alpha)\,(\lambda^2\alpha' - 2\lambda\beta' - \gamma') + (\alpha'\lambda^2 + \gamma')\,(\lambda^2\gamma + 2\lambda\beta - \alpha) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

В последнем уравнении принято

$$\begin{aligned} d\lambda_1 + \lambda_1\,(\omega_1^1 - \omega_3^3) + 2\omega_3^1 = \lambda_{11}\omega_1^3 + \lambda_{12}\omega_2^4, \\ d\lambda_2 + \lambda_2\,(\omega_2^2 - \omega_4^4) - 2\omega_1^2 = \lambda_{21}\omega_1^3 + \lambda_{22}\omega_2^4. \end{aligned} \tag{3}$$

Из первых двух уравнений системы (2), исключая $\lambda_1 + \lambda\lambda_2$ (при условиях $\lambda^2 \neq -\dfrac{\alpha}{\gamma}$ и $\alpha\alpha' - \gamma\gamma' \neq 0$), получим уравнение пятой степени относительно

$$\begin{aligned} \gamma\alpha'\,(\gamma_2 - \alpha_2')\,\lambda^5 + 3\gamma\alpha'\,(\beta_2 + \beta_2')\,\lambda^4 + [\alpha\alpha'\,(3\beta_1 - \alpha_2') + \\ + \gamma\gamma'\,(\gamma_2 + 3\beta_1')]\,\lambda^3 + [\alpha\alpha'\,(3\beta_2' - \alpha_1) + \gamma\gamma'\,(\gamma_1' + 3\beta_2)]\,\lambda^2 + \\ + 3\alpha\gamma'\,(\beta_1 + \beta_1')\,\lambda + \alpha\gamma'\,(\gamma_1' - \alpha_1) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Конечное уравнение (4) и два последних дифференциальных уравнения системы (2) являются необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы линейчатая поверхность $\omega_2^4 = \lambda\omega_1^3$ конгруэнции была квадрикой.

4. В этом пункте рассматривается вопрос о том, когда линейчатые поверхности конгруэнции, соответствующие асимптотическим линиям (5) фокальных поверхностей, являются квадриками.

Известно, что конгруэнция W с двумя линейчатыми фокальными поверхностями содержит квадрики, которые соответствуют прямолинейным образующим фокальных поверхностей [3]. Линейчатые поверхности конгруэнции, соответствующие асимптотическим линиям первой фокальной поверхности, определяются уравнениями $\omega_2^4 = \varepsilon\sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma}}\,\omega_1^3$ ($\varepsilon = \pm 1$) [5]. Следовательно, для этих линейчатых поверхностей

$$\lambda = \varepsilon\sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma}}. \tag{5}$$

Дифференцируя это уравнение, в силу (1′) и (A) получим

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_1 - \beta_2}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{\beta_1 + \gamma_2}{2}. \tag{6}$$

Внося значения (5) и (6) во второе уравнение системы (4), получим

$$\sqrt{\gamma}(\alpha_1 + 3\beta_2) + \varepsilon\sqrt{-\alpha}(\gamma_2 - 3\beta_1) = 0. \tag{7}$$

Последнее уравнение показывает, что *фокальная поверхность* (A_1) — *линейчатая* [5].

Равенство (7) не зависит от ε тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1 + 3\beta_2 = 0, \ \gamma_2 - 3\beta_1 = 0 \tag{8}$$

Это означает, что *если обе линейчатые поверхности, соответствующие асимптотическим линиям фокальной поверхности* (A_1), *являются квадриками, то поверхность* (A_1) *тоже является квадрикой.*

Первое уравнение системы (2), в силу значений (5), (6) и (8), напишется в виде

$$3\left(\beta_2 + \varepsilon\sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma}}\,\beta_1\right)(\gamma\gamma' - \alpha\alpha') + \varepsilon\sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma}}\,(3\gamma\gamma'\beta_1' + \alpha\alpha'\alpha_2') + \\ + \gamma\gamma'\gamma_1' - 3\alpha\alpha'\beta_2' = 0.$$

Это уравнение не зависит от ε тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered} 3\beta_1(\gamma\gamma' - \alpha\alpha') + 3\gamma\gamma'\beta_1' + \alpha\alpha'\alpha_2' = 0, \\ 3\beta_2(\gamma\gamma' - \alpha\alpha') + \gamma\gamma'\gamma_1' - 3\alpha\alpha'\beta_2' = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Дифференцируя уравнения (6), в силу уравнений (3), получим

$$\lambda_{11}=\frac{\alpha_{11}-\alpha\beta_{12}}{2}, \quad \lambda_{12}=\frac{3\alpha\alpha'+\gamma\gamma'-\beta_{11}-\beta_{22}}{2}-2\beta\beta'$$

$$\lambda_{21}=-\frac{\alpha\alpha'+3\gamma\gamma'+\beta_{11}+\beta_{22}}{2}+2\beta\beta', \lambda_{22}=-\frac{\gamma_{22}+\gamma\beta_{12}}{2}.$$

Внося эти значения в последнее уравнение системы (2), в силу равенств (8) получим тождество.

Из уравнений (9) вытекает, что если конгруэнция $(A_1 A_2)$ есть W — конгруэнция

$$\alpha\alpha'-\gamma\gamma'=0, \tag{9}$$

то вторая фокальная поверхность (A_2) также является квадрикой, т. е.

$$\alpha_2'+3\beta_1'=0, \ \gamma_1'-3\beta_2'=0 \tag{10}$$

и, наоборот, если вторая фокальная поверхность (A_2) является квадрикой, то конгруэнция $(A_1 A_2)$ есть конгруэнция W. Таким образом мы получили конгруэнцию W, две фокальные поверхности которой являются квадриками и, следовательно, две асимптотические поверхности (линейчатые поверхности конгруэнции, соответствующие асимптотическим линиям фокальных поверхностей) также являются квадриками.

5. Известно, что W-конгруэнция будет конгруэнцией R, если одна ее фокальная поверхность будет квадрикой ([3]).

Здесь мы будем доказывать одну теорему: *Если обе фокальные поверхности конгруэнции W являются квадриками, то все фокальные поверхности последовательности Лапласа также являются квадриками.*

Согласно условиям теоремы мы имеем следующие уравнения:

$$\alpha\alpha'-\gamma\gamma'=0, \ \alpha_1+3\beta_2=0, \ \gamma_2-3\beta_1=0, \ \alpha_2'+3\beta_1'=0, \ \gamma_1'-3\beta_2'=0. \tag{11}$$

Дифференцируя первое уравнение этой системы и пользуясь остальными уравнениями, получим

$$\beta_1+\beta_1'=0, \ \beta_2+\beta_2'=0. \tag{12}$$

Из 2 и 3-го уравнений системы (11), как дифференциальное следствие, будем иметь ([7]):

$$\beta_{11}=\alpha\alpha', \ \beta_{22}=-\alpha\alpha'. \tag{13}$$

Новое дифференцирование уравнений (13) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \Delta\beta_{11} &= (3\beta_1\alpha\beta'+3\beta_1'\beta\gamma'-2\alpha\alpha'\beta_2)\,\omega_1^3 \\ \Delta\beta_{22} &= -(3\beta_2'\alpha'\beta+3\beta_2\beta'\gamma+2\alpha\alpha'\beta_1)\,\omega_2^4. \end{aligned} \tag{14}$$

Из этих уравнений в силу (A) получим

$$\beta_{111} = 3\beta_1' \alpha\beta' + 3\beta_1' \beta\gamma' - 2\alpha\alpha' \beta_2, \quad \beta_{121} = 0,$$
$$\beta_{222} = -(3\beta_2' \alpha'\beta + 3\beta_2\beta'\gamma + 2\alpha\alpha' \beta_1), \quad \beta_{122} = 0. \tag{15}$$

Отнесем конгруэнцию $(A_1 A_2)$ к осям фокальной сети (A_1), т. е. допустим, что имеют место уравнения [5]:

$$\beta = \beta' = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0. \tag{16}$$

Выбранный тетраэдр является тетраэдром 1-го порядка для второй конгруэнции последовательности Лапласа, которая теперь описывается лучом $(A_3 A_1)$.

Коэффициенты конгруэнции $(A_3 A_1)$ вычисляются из формул [5]

$$\bar{\alpha} = \frac{\beta_{11}}{\alpha}, \quad \bar{\beta} = -\beta_{12}, \quad \bar{\gamma} = -\frac{\beta_{22}}{\gamma}, \quad \bar{\alpha}' = \frac{1}{\gamma}, \quad \bar{\beta}' = 0, \quad \bar{\gamma}' = \frac{1}{\alpha},$$

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{\beta_{111}}{\alpha\beta_{11}} - \frac{\alpha_1}{\alpha}, \quad \bar{\beta}_1 = -\frac{\beta_{121}}{\beta_{11}}, \quad \bar{\beta}_2 = \frac{\beta_{122}}{\beta_{22}}, \quad \bar{\gamma}_2 = \frac{\beta_{222}}{\gamma\beta_{22}} - \frac{\gamma_2}{\gamma}, \tag{17}$$

$$\bar{\alpha}_2' = -\frac{\gamma_2}{\gamma}, \quad \bar{\beta}_2' = 0, \quad \bar{\beta}_1' = 0, \quad \bar{\gamma}_1' = -\frac{\alpha_1}{\alpha}.$$

Поверхность (A_3) является квадрикой тогда и только тогда, когда

$$\bar{\alpha}_1 + 3\bar{\beta}_2 = 0, \quad \bar{\gamma}_2 - 3\bar{\beta}_1 = 0.$$

В силу уравнений (11) -- (17) последние уравнения превращаются в тождество, и теорема доказывается.

В работе [7] была доказана теорема существования конфигурации L. L есть частный случай полученной последовательности (когда последовательность замыкается после четвертого шага, т. е. когда $\beta_{12} + \beta' = 0$ [8]).

Результаты 4 и 5-го пунктов позволяют сформулировать следующую теорему:

Если в конгруэнции W две линейчатые поверхности, соответствующие асимптотическим линиям одной фокальной поверхности, являются квадриками, то все фокальные поверхности последовательности Лапласа, порожденной этой конгруэнцией, и все линейчатые поверхности этой последовательности, соответствующие асимптотическим линиям фокальных поверхностей, также являются квадриками.

6. В этом пункте получается соприкасающаяся линейная конгруэнция линейчатой поверхности $\omega_2^1 = \lambda\omega_1^3$ конгруэнции. Если линейча-

тая поверхность $\omega_1^4 = \lambda\omega_1^3$ не квадрика, то такая линейная конгруэнция в пятимерном проективном пространстве определяется четырьмя точками $[12]$, $d[12]$, $\mathrm{mod}\,(\omega_2^4 - \lambda\omega_1^3)$, $d^2[12]$ $\mathrm{mod}\,(\omega_2^4 - \omega_1^3)$ и $d^3[12]$ $\mathrm{mod}\,(\omega_2^4 - \lambda\omega_1^3)$, или трехмерной плоскостью

$$([12]\ d[12]\ d^2[12]\ d^3[12])\ \mathrm{mod}\,(\omega_2^4 - \lambda\omega_1^3).$$

Эта плоскость совпадает с плоскостью, определяемой четырьмя точками

$$a_1 = [12],\ a_2 = \lambda[14] - [23],$$

$$a_3 = 2\lambda[34] + \lambda(\lambda_1 + \lambda\lambda_2)[14] + (\lambda^2\alpha' - 2\lambda\beta' - \gamma')[13] +$$

$$+ (-\lambda^2\gamma - 2\lambda\beta + \alpha)[42], \tag{18}$$

$$a_4 = a[14] + b[13] + c[42],$$

где

$$a = \lambda(\lambda_{11} + \lambda\lambda_{12}) + \lambda^2(\lambda_{21} + \lambda\lambda_{22}) + {}^1/_2\lambda(\lambda^2\lambda_2^2 - \lambda_1^2) +$$

$$+ (\gamma\lambda^2 + \alpha)(\lambda^2\alpha' - 2\lambda\beta' - \gamma') + (\alpha'\lambda^2 + \gamma')(\lambda^2\gamma + 2\lambda\beta - \alpha),$$

$$b = \frac{3}{2}(\lambda_1 + \lambda\lambda_2)(\alpha'\lambda^2 + \gamma') - \gamma'\gamma_1' + \alpha'\alpha_2'\lambda^3 - 3\lambda(\gamma'\beta_1' + \lambda\alpha'\beta_2'),$$

$$c = -\frac{3}{2}(\lambda_1 + \lambda\lambda_2)(\gamma\lambda^2 + \alpha) + \alpha\alpha_1 - \gamma\gamma_2\lambda^3 - 3\lambda(\alpha\beta_1 + \lambda\gamma\beta_2). \tag{19}$$

Пусть прямая

$$d = p^{ij}\ [ij]\quad i, j = 1, 2, 3, 4 \tag{20}$$

является директрисой линейной конгруэнции $(a_1 a_2 a_3 a_4)$, тогда координаты прямой d должны удовлетворять пяти уравнениям

$$p^{34} = 0,\quad \lambda p^{23} - p^{14} = 0,\quad p^{23}p^{14} + p^{13}p^{42} = 0,$$

$$2\lambda p^{12} + \lambda(\lambda_1 + \lambda\lambda_2)p^{23} + (\lambda^2\alpha' - 2\lambda\beta' - \gamma')p^{42} +$$

$$+ (-\lambda^2\gamma - 2\lambda\beta + \alpha)p^{13} = 0 \tag{21}$$

$$ap^{23} + bp^{42} + cp^{13} = 0.$$

Так как координаты p^{ij} в третьем уравнении имеют вторую степень, то, решая эти пять уравнений относительно шести однородных координат p^{ij} и внося эти значения в (20), мы получим две директрисы искомой линейной конгруэнции.

Для развертывающихся поверхностей $\omega_2^4 = 0$ и $\omega_1^3 = 0$, трехмерные плоскости, определяемые точками (18), имеют сопряженные прямые в P_5

$$([12],\ 2\gamma'[13] + 2\alpha[42] + (\alpha_1 - \gamma_1')[23]),$$

$$([12],\ 2\alpha'[13] + 2\gamma[42] - (\alpha_2' - \gamma_2)(14]). \tag{22}$$

Каждая из этих прямых пересекается с гиперквадрикой Q_4^2 ([5]) только в одной точке (12), следовательно, *директрисы соприкасающейся линейной конгруэнции, для развертывающейся поверхности, сливаются в одну прямую, совпадающую с образующей этой поверхности.*

Две прямые (22) в P_5 совпадают тогда и только тогда, когда конгруэнция удовлетворяет требованиям

$$\alpha\alpha' - \gamma\gamma' = 0, \quad \alpha_1 - \gamma_1' = 0, \quad \alpha_2' - \gamma_2 = 0.$$

Такая конгруэнция подробно изучена в работе ([11]).

Если обе директрисы некоторой линейчатой поверхности проходят через фокусы луча конгруэнции (следовательно они лежат в фокальных плоскостях), то согласно (19), (20) и (21) это требование равносильно уравнениям

$$b = 0, \quad c = 0. \tag{23}$$

Для двух гармонических линейчатых поверхностей ($\lambda = \pm\sqrt{\alpha/\gamma}$, ([10])) первой фокальной поверхности (A_1) конгруэнции уравнения (23) дадут

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + 3\beta_2 = 0, \quad 3\beta_2(\alpha\alpha' + \gamma\gamma') + \gamma\gamma'\gamma_1' + 3\alpha\alpha'\beta_2' = 0, \\ &\gamma_2 - 3\beta_1 = 0, \quad 3\beta_1(\alpha\alpha' + \gamma\gamma') - \alpha\alpha'\alpha_2' + 3\gamma\gamma'\beta_1' = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Первый столбец этой системы показывает, что (A_1) — *есть поверхность второго порядка.*

Аналогичное требование для гармонических линейчатых поверхностей второй фокальной поверхности (A_2) вместе с системой (24) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + 3\beta_2 = 0, \quad \alpha_2' + 3\beta_1' = 0, \quad \beta_1 + \beta_1' = 0, \\ &\gamma_2 - 3\beta_1 = 0, \quad \gamma_1' - 3\beta_2' = 0, \quad \beta_2 + \beta_2' = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Конгруэнция, удовлетворяющая системе (25), подробно изучена в заметке [8]. Таким образом, *директрисы соприкасающихся линейных конгруэнций всех гармонических линейчатых поверхностей проходят через фокусы луча $A_1 A_2$ тогда и только тогда, когда обе фокальные поверхности конгруэнции $(A_1 A_2)$ являются квадриками и эта конгруэнция вместе с конгруэнцией (r') (где r' — прямая пересечения соприкающихся плоскостей вторых фокальных кривых) образует пару T.*

Ереванский армянский педагогический
институт им. Х. Абовяна

Ս. Ե. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

Կոնգրուենցիաների կվադրիկները

Աշխատանքում ստացվել են անհրաժեշտ և բավարար պայմանները, որոնց պետք է բավարարեն կոնգրուենցիան և նրա որևէ գծավոր մակերևույթը, որպեսզի վերջինը լինի երկրորդ կարգի մակերևույթ (կվադրիկա)։ Ապացուցվում են հետևյալ թեորեմները։

1. Եթե կոնգրուենցիայի որևէ ֆոկալ մակերևույթի երկու ասիմպտոտական գծերին համապատասխանող գծավոր մակերևույթները կվադրիկներ են, ապա այդ ֆոկալ մակերևույթն ինքը ևս կվադրիկա է։

2. Եթե W կոնգրուենցիայի ֆոկալ մակերևույթները կվադրիկներ են, ապա Լապլասի հաջորդականության բոլոր ֆոկալ մակերևույթները նույնպես կվադրիկներ են։

3. Եթե W կոնգրուենցիայի որևէ ֆոկալ մակերևույթի երկու ասիմպտոտական գծերին համապատասխանող գծավոր մակերևույթները կվադրիկներ են, ապա Լապլասի հաջորդականության բոլոր ֆոկալ մակերևույթները և նրանց ասիմպտոտական գծերին համապատասխանող բոլոր գծավոր մակերևույթները նույնպես կվադրիկներ են։

Աշխատանքում նաև ստացվել են կոնգրուենցիաների գծավոր մակերևույթների հպման գծային կոնգրուենցիաները։

4. Կոնգրուենցիայի փակող մակերևույթի հպման գծային կոնգրուենցիայի երկու դիրեկտրիսները ձուլվելով համընկնում են այդ փակող մակերևույթի ծնիչի հետ։

5. Կոնգրուենցիայի բոլոր հարմոնիկ գծավոր մակերևույթների հպման գծային կոնգրուենցիաների դիրեկտրիսները անցնում են ֆոկուսներով այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ ֆոկալ մակերևույթները կվադրիկներ են և մեր կոնգրուենցիան իր երկրորդ ֆոկալ կորերի հպման հարթությունների հատման գծի կոնգրուենցիայի հետ կազմում է T զույգ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Егоров*. Rend. dei Lincei, сер. 6. 10. сем. 2, 1929, стр. 145. [2] *С. П. Фиников*. Rend dei Lincei, сер. 6. 12. сем. 2, 1930, стр. 302. [3] *С. П. Фиников*. Проективно-дифференциальная геометрия, 1937. [4] *Гамбье*, Annales de la Fac. des Sciences de Toulouse, сер. 3, 27, 1935. стр. 201. [5] *С. П. Фиников*, Теория конгруэнций, 1950. [6] *С. Е. Карапетян*, ДАН СССР, 177, 2 (1957); [7] *С. Е. Карапетян*, Известия АН АрмССР, в печати. [8] *С. Е. Карапетян*, Научные доклады ВШ, №1, 1958. [9] *С. П. Фиников*, Метод внешних форм Картана, 1948. [10] *С. Е. Карапетян*, ДАН СССР, 122, 3 (1958). [11] *С. Е. Карапетян*, ДАН АрмССР, т. XXV, №3 (1957).