ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXX 1960 1

ФИЗИКА

Г. С. Саакян

О дисперсионных свойствах среды при очень больших плотностях и температурах

Сообщение I. Рассеяние электромагнитных волн электронами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. М. Кочаряном 15.VI 1959)

В работе ([1]) было показано, что при определенных физических условиях в диспергирующей среде, с показателем преломления меньше единицы, могут произойти процессы однофотонной аннигиляции и рождения электронных пар $\gamma \rightleftarrows e_+ + e_-$. В вакууме эти процессы могут произойти лишь при наличии посторонней частицы. Однако не во всяких средах, где показатель преломления меньше единицы, могут протекать эти процессы. Кроме этого условия необходимо также накладывать определенные ограничения на плотность частиц и на температуру среды. Ограничение на плотность частиц среды непосредственно следует из рассмотрения предела применимости самого понятия показателя преломления. По-видимому о показателе преломления имеет смысл говорить лишь при соблюдении условия

$$\lambda \gtrsim l, \tag{1}$$

где l — среднее расстояние между электронами, а λ — длина электромагнитной волны, деленная на 2π. Из условия (1), а также из того факта, что при рождении и аннигиляции электронных пар энергия фотона должна превышать $2mc^2$, где m — масса электрона, следует, что рассмотренное явление может иметь место лишь при достаточно больших плотностях частиц в среде.

$$N \gtrsim 8\lambda_e^{-3} \approx 1{,}4 \cdot 10^{32}\, см^{-3}, \tag{2}$$

где $\lambda_e = \dfrac{h}{mc}$ — комптоновская длина волны электрона деленная на 2π. Такие большие плотности по-видимому существуют во внутренних областях белых ультракарликов.

При таких физических условиях, очевидно, атомы полностью ионизированы, а совокупность электронов представляет собою релятивистский идеальный газ. Средняя кинетическая энергия электронов при плотностях (2) будет порядка mc^2 и больше, а отношение потенциальной энергии $\frac{ze^2}{r}$ к кинетической cp будет $\frac{ze^2}{rpc} \approx z\frac{e^2}{\hbar c} \ll 1$.

Важно также выяснить, в каком состоянии находится электронный газ: в вырожденном или невырожденном. Температура вырождения для релятивистского газа определяется формулой

$$\chi T_0 = \pi \hbar c N^{1/3} - mc^2, \tag{3}$$

где χ — постоянная Больцмана. Из (2) и (3) следует, что для интересующих нас плотностей

$$T_0 \gtrsim 4\cdot 10^{10}. \tag{4}$$

Если в соответствующих областях звезд $T \ll T_0$, то мы будем иметь дело с вырожденным электронным газом, наоборот, при температурах, превышающих T_0, электронный газ не будет вырожденным. Какой именно случай на самом деле имеет место—трудно сказать. Возможно, что в природе встречаются белые карлики того и другого типа. Эти два случая приводят к совершенно разным физическим результатам. В первом случае, при достаточно высоких плотностях материи, мы будем иметь дело со средой, дисперсионные свойства которой, при весьма высоких частотах, определяются не электронами, а нейтронами. В такой среде показатель преломления больше единицы, и поэтому процесс $\gamma \rightleftarrows e_+ + e_-$ запрещен. Наоборот, в ней будет иметь место другое явление, а именно заряженные частицы, движущиеся со скоростью, превышающей фазовую скорость света, будут испускать жесткое черенковское излучение с энергией квантов до 150 Мэв. В случае же отсутствия вырождения дисперсионные свойства среды всегда определяются электронами. В такой среде при плотностях (2) процесс $\gamma \rightleftarrows e_+ + e_-$ разрешен, а о черенковском излучении не может быть и речи.

Ниже подробно обсуждаются эти два крайних случая. Сперва рассмотрим второй случай, когда электронный газ не вырожден. В этом случае очевидно, что дисперсия волн всегда будет определяться электронами.

Как известно, при частотах выше атомных частот показатель преломления среды определяется формулой

$$n^2 = 1 - \frac{4\pi N e^2}{m\omega^2}. \tag{5}$$

Однако в нашем случае нельзя пользоваться этой формулой, так как при ее выводе предположено, что электроны нерелятивистские, тогда как в данном случае они являются релятивистскими.

Не трудно видеть, что при плотностях (2) электроны являются квазиклассическими частицами. Действительно, учитывая (1), получаем

$$\frac{mhF}{p^3} \sim \frac{me^2}{h^2} z^{1/3} l < \frac{e^2}{hc} z^{1/3}, \quad (6)$$

где $p \sim h/l$ — средний импульс электрона и $F = \frac{ze^2}{r^2} \approx z^{1/3}\frac{e^2}{l^2}$ — сила, действующая на электрон. Итак, при вычислении показателя преломления, мы можем пользоваться методами классической физики. Этот метод можно применить и при плотностях, меньших чем 10^{32} $см^{-3}$. Из (6) видно, что для выполнения условия квазиклассичности необходимо, чтобы среднее расстояние между частицами удовлетворяло соотношению $l \ll 0{,}5 \cdot 10^{-8} \cdot z^{-1/3}$, т. е. была бы намного меньше фермиевского радиуса атома.

Напишем уравнение Гамильтона—Якоби для электрона, находящегося в поле электромагнитной волны

$$\left(\nabla S - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{ze^2}{r}\right)^2 + m^2 c^2 = 0, \quad (7)$$

где $\vec{A}(\vec{r},t)$ — вектор-потенциал поля

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}. \quad (8)$$

Мы видели, что средняя кулоновская энергия взаимодействия значительно меньше средней кинетической энергии электронов, поэтому в (7) мы можем пренебречь членом $\frac{ze^2}{r}$.

Решение уравнения (7) будем искать в следующем виде [2]

$$S = \vec{a}\vec{r} + bt + f(\vec{k}\vec{r} - \omega t), \quad (9)$$

где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — постоянные, а f — неизвестная функция. Подставив (9) в (7) мы получаем уравнение, содержащее первую степень f'. Интегрируя это уравнение, мы сразу находим функцию f. В результате для S получается

$$S = \vec{a}\vec{r} + bt + \frac{1}{2}\left[(\vec{a}\vec{k}) + \frac{\omega}{c^2} b\right]^{-1}\Big\{\left(\frac{b^2}{c^2} - m^2c^2 - a^2\right)(\vec{k}\vec{r} - \omega t) -$$

$$- \frac{2e}{c} i(\vec{a}\vec{A}) + i\frac{e^2}{2c^2} A^2\Big\}. \quad (10)$$

Дальше мы будем опускать члены пропорциональные A^2, считая интенсивность излучения достаточно малой.

Теперь мы можем вычислить импульс частицы

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \nabla S - \frac{e}{c}\vec{A} =$$

$$= \vec{a} + \frac{1}{2}\left[(\vec{a}\,\vec{k}) + \frac{\omega}{c^2}\,b\right]^{-1}\left\{\left(\frac{b^2}{c^2} - m^2c^2 - a^2\right)\vec{k} + \right.$$

$$\left. + \frac{2e}{c}(\vec{a}\,\vec{A})\,\vec{k}\right\} - \frac{e}{c}\vec{A}. \qquad (11)$$

Подставляя здесь $A = 0$, мы находим импульс и скорость электрона в отсутствии поля

$$\vec{p}_0 = \frac{m\vec{v}_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}} = \vec{a} + \left(\frac{b^2}{c^2} - m^2c^2 - a^2\right)\left[(\vec{a}\,\vec{k}) + b\,\frac{\omega}{c^2}\right]^{-1}.$$

Однако по своему физическому смыслу p_0 не должен содержать ω и k, а это будет иметь место, если мы предположим

$$\vec{a} = \vec{p}_0 \quad \text{и} \quad b = E_0, \qquad (12)$$

где $E_0 = c\sqrt{m^2c^2 + p_0^2}$ — начальная энергия электрона. Подставляя (12) в (11), получаем

$$\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \vec{p}_0 + \frac{e}{c(\vec{p}_0\,\vec{k}) + kE_0}(\vec{p}_0\,\vec{A})\,\vec{k} - \frac{e}{c}\vec{A}. \qquad (13)$$

Нам необходимо определить добавочную скорость, приобретаемую электроном в поле электромагнитной волны $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0$. С этой целью $(1-\beta^2)^{-1/2}$ разложим в ряд по степеням v', и так как эта скорость пропорциональна вектору-потенциалу $\vec{A}$, то мы должны ограничиться членами, содержащими не выше первой степени v'. В результате получаем

$$\frac{m\vec{v}_0\,(\vec{v}_0\,\vec{v}')}{c^2(1-\beta_0^2)^{3/2}} + \frac{m\vec{v}'}{\sqrt{1-\beta_0^2}} = \frac{e\,(\vec{p}_0\,\vec{A})\,\vec{k}}{c\,(\vec{p}_0\,\vec{k}) + kE_0} - \frac{e}{c}\vec{A}.$$

Решая это уравнение относительно $\vec{v}'$, находим

$$\vec{v}' = -\frac{ec}{E_0}\vec{A} + \frac{ec^2\,(\vec{p}_0\,\vec{A})\,\vec{k}}{E_0[c\,(\vec{p}_0\,\vec{k}) + kE_0]} - \frac{ec^4\,(\vec{p}_0\,\vec{k})\,(\vec{p}_0\,\vec{A})}{E_0^3\,[c\,(\vec{p}_0\,\vec{k}) + kE_0]}\vec{p}_0 +$$

$$+ \frac{ec^3\,(\vec{p}_0\vec{A})}{E_0^3}\vec{p}_0. \qquad (14)$$

В (14) мы можем вектор-потенциал заменить через напряженность электрического поля

$$\vec{A} = -i\,\frac{c}{\omega}\vec{E}. \tag{15}$$

Теперь мы можем определить ток, индуцированный внешним электромагнитным полем

$$\vec{j}' = e\int \vec{v}' f(p_0)dp_0 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi, \tag{16}$$

где $f(p)dp \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ — число электронов в единице объема с импульсами в интервале $(\vec{p}, \vec{p} + d\vec{p})$. Дальше мы не будем больше писать индекс нуль при импульсе и энергии. Направление волнового вектора примем в качестве полярной оси; соответственно оси x-ов и y-ов направим вдоль векторов электрического и магнитного полей. Следовательно, угол φ в плоскости (xy) отсчитывается от направления вектора $\vec{E}$.

Из (14) и (16) видно, что $j'_y = j'_z = 0$, т. е. направление $\vec{j}'$ совпадает с направлением вектор-потенциала. Подставив (14) в (16) и произведя интегрирование по углам (по начальным направлениям движения электронов) и учитывая (15), получаем

$$\vec{j}' = i\,\frac{2\pi e^2 \cdot c^2}{\omega}\vec{E}\int\left(1 + \frac{m^2c^3}{Ep}\ln\frac{E + cp}{mc^2}\right)\frac{f(p)}{E}\,dp. \tag{17}$$

Далее, мы должны написать микроскопические и макроскопические уравнения поля

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}' = -\frac{i\omega}{c}\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}',$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = -\frac{i\omega}{c}n^2\vec{E}. \tag{18}$$

Из (17) и (18) находим

$$n^2 = 1 - \frac{8\pi^2 e^2 c^2}{\omega^2}\int\left(1 + \frac{m^2c^3}{Ep}\ln\frac{E + cp}{mc^2}\right)\frac{f(p)\,dp}{E}, \tag{19}$$

где интегрирование должно производиться в случае вырождения в пределах от нуля до граничного импульса Ферми p_f, а в случае отсутствия вырождения, в пределах от нуля до ∞.

Сначала рассмотрим случай вырождения. В этом случае

$$f(p) = \frac{p^2}{4\pi^3 h^3}. \tag{20}$$

Подставляя (20) в (19), интегрируя в пределах от нуля до p_f, где

$$p_f = h\,(3\pi^2 N)^{1/3}, \tag{21}$$

находим, при импульсах $p_f \ll mc$, известную формулу

$$n^2 = 1 - \frac{4\pi N e^2}{m\omega^2},$$

а при импульсах $p_f \gtrsim mc$

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \tag{22}$$

где

$$\omega_0^2 \approx \frac{3\pi N e^2 c}{p_f} \approx \frac{3c^2}{137} N^{2/3}. \tag{23}$$

Таким образом, в релятивистском случае постоянная пропорциональна не N, а $N^{2/3}$.

Теперь перейдем к рассмотрению случая отсутствия вырождения электронного газа. В этом случае имеем ([3])

$$f(p) = \frac{N\varphi(T)}{4\pi} \cdot \frac{p^2}{(mc)^3} e^{-\frac{E}{\chi T}}, \tag{24}$$

где $E = c\sqrt{m^2 c^2 + p^2}$ и

$$\varphi(T) = \left[\frac{2}{u^2} K_1(u) + \frac{1}{u} K_0(u)\right]^{-1}. \tag{25}$$

K_1 и K_0 — функции Бесселя второго рода от мнимого аргумента, и $u = \frac{mc^2}{\chi T}$.

При $u \gg 1$; $K_1(u) \approx K_0(u) \approx \left(\frac{\pi}{2u}\right)^{1/2} e^{-u}$ и следовательно $\varphi \approx 4\pi (mc)^3 (2\pi m \chi T)^{-3/2} e^u$. А при $u \ll 1$, $K_1(u) \approx \frac{1}{u}$, $K_0(u) \approx \ln \frac{2}{\gamma u}$, где $\ln \gamma = 0{,}577 \cdots$, и следовательно $\varphi \approx \frac{1}{2} u^3$.

Как и в предыдущем случае, после подстановки (24) в (19) получается интеграл, который невозможно интегрировать точно. При $u \lesssim 1$ приблизительно имеем

$$n^2(\omega) = 1 - \frac{4{,}8\pi e^2}{m\omega^2} \cdot \frac{N\varphi}{u} e^{-u}. \tag{26}$$

При $u \gg 1$, формула (26) становится неверной и не дает правильного перехода к известной формуле. Как мы видим, в отсутствии вырождения показатель преломления зависит от температуры.

Очевидно, что в этом случае в области применимости понятия диэлектрической постоянной среды, дисперсия волн всегда определяется электронами. Следовательно при плотностях электронов $N_e \gtrsim 1{,}4 \cdot 10^{32}$ $см^{-3}$ процессы однофотонной аннигиляции и рождения электронных пар могут идти с участием среды.

Теперь рассмотрим второй предельный случай, когда электронный газ полностью вырожден. При этом возможны еще два случая: первый—когда нейтроны невырождены, и второй случай, когда и нейтронный газ также вырожден.

При таких физических условиях (электроны вырождены, плотности большие) оказывается термодинамически более выгодным реакция, когда ядро захватывает электрон и одновременно испускает нейтрино [3]. При рассмотренных нами плотностях благодаря этой реакции число протонов в ядре сильно уменьшается и в конце концов ядра становятся неустойчивыми и распадаются. В результате мы будем иметь дело с идеальным газом, состоящим из электронов, протонов и нейтронов. Число частиц разных сортов определяется из условия равновесия, т. е. из условия минимума термодинамического потенциала при постоянном давлении и температуре. Для рассматриваемой реакции $e^- + P \rightleftarrows N$, где e^-, P и N — соответственно означают электрон, протон и нейтрон, условие равновесия гласит,

$$\mu_e + \mu_p = \mu_n, \tag{27}$$

где μ_e, μ_p и μ_n — химические потенциалы соответствующих частиц. Химический потенциал электронов равен

$$\mu_e = \varepsilon_f = c\sqrt{m^2c^2 + p_f^2} \approx \pi c h N_e^{1/3}, \tag{28}$$

где E_f — граничная энергия Ферми. Если нуклонный газ не вырожден, то имеем [3]

$$\mu_p = \chi T \ln\left[\frac{N_p}{2}\left(\frac{2\pi h^2}{M\chi T}\right)^{3/2}\right], \quad \mu_n = \chi T \ln\left[\frac{N_n}{2}\left(\frac{2\pi h^2}{M\chi T}\right)^{3/2}\right]. \tag{29}$$

Подставляя значения химических потенциалов в (27) и учитывая очевидное равенство $N_p = N_e$, находим

$$N_n = N_e \exp\left(\frac{\pi c h N_e^{1/3}}{\chi T}\right). \tag{30}$$

Поскольку электронный газ считается полностью вырожденным, то $\chi T \ll \pi c h N_e^{1/3}$, и следовательно $N_n \gg N_e$.

А теперь допустим, что при рассматриваемых плотностях температуры настолько низкие, что электронный, нейтронный и протонный газы полностью вырождены. Тогда имеем

$$\mu_p = Mc^2 + \frac{h^2}{2M}(3\pi^2 N_e)^{2/3},$$

$$\mu_n = M_n c^2 + \frac{h^2}{2M_n}(3\pi^2 N_n)^{2/3}, \tag{31}$$

где $M_n = M + \alpha m$ — масса нейтрона, а $\alpha \approx 2{,}54$ — разность масс нейтрона и протона в единицах массы электрона. Здесь мы считаем протоны и нейтроны нерелятивистскими частицами, что имеет место при плотностях материи вплоть до порядка ядерных плотностей. Подставив (28) и (31) в условие равновесия (27), находим

$$N_e = \frac{N_0}{x^3}\left\{\left[1 + x\frac{\alpha}{\pi} + x^2\left(\frac{N_n}{N_0}\right)^{2/3}\right]^{1/2} - 1\right\}^3, \qquad (32)$$

где введены обозначения $N_0 = 8\lambda^{-3} = 1,4 \cdot 10^{32}\ см^{-3}$, и $x = \frac{2\pi m}{M}$.

Если ограничиться рассмотрением плотностей порядка ядерных и меньше $N_n \lesssim 10^{38}\ см^{-3}$, то (32) можно упростить

$$N_e \approx \frac{N_0}{8}\left[\frac{\alpha}{\pi} + x\left(\frac{N_n}{N_0}\right)^{2/3}\right]^3. \qquad (32')$$

Чтобы в этом случае выяснить возможность или невозможность разыгрывания процесса $\gamma \to e_+ + e_-$ с участием среды, для этого сперва необходимо выяснить роль нуклонов в рассеянии электромагнитных волн. Изучению этого вопроса будет посвящено второе сообщение.

Физический институт
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Դիսպերսիայի օրենքը շատ մեծ խտությունների և ջերմաստիճանների դեպքում

Հաղորդում I: Էլեկտրամագնիսական ալիքների ցրումը էլեկտրոններով

Աշխատանքում ուսումնասիրված է միջավայրի դիսպերսիոն հատկությունների շատ մեծ խտությունների և ջերմաստիճանների դեպքում՝ մասնավորապես այնպիսի ֆիզիկական պայմաններում, ինչպիսին հնարավոր է, որ գոյություն ունեն ոչ նորմալ աստղերում (ուլտրաթզուկներ): Խտությունները ենթադրվում են այնքան մեծ, որ միջավայրի բոլոր ատոմները իոնացված են:

Այն դեպքում, երբ էլեկտրոնային գազը այլասերված է, միջավայրի բեկման ցուցիչը որոշվում է բանաձև (22)-ով, իսկ այլասերման բացակայության դեպքում բանաձև (26)-ով:

Երբ էլեկտրոնային գազը ուժեղ այլասերված է, ապա բավականին մեծ խտությունների դեպքում, էներգետիկորեն ավելի ձեռնտու է դառնում $P + e_- \to N + \nu$ ռեակցիան, որտեղ P, e_-, N և ν համապատասխանաբար նշանակում են պրոտոն, էլեկտրոն, նեյտրոն և նեյտրինո: Հաշված է էլեկտրոնների խտությունը: Նեյտրոնների և էլեկտրոնների խտությունները, նուկլոնային գազի այլասերման բացակայության դեպքում, իրար հետ կապված են բանաձև (30)-ով, իսկ ուժեղ այլասերման դեպքում բանաձև (32)-ով:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. С. Саакян*, ДАН АрмССР, 29, 23, 1959. [2] *Л. Д. Ландау* и *Е. М. Лифшиц*, Теория поля, М., 1948. [3] *Л. Д. Ландау* и *Е. М. Лифшиц*, Статистическая физика, М., 1951.