ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXX 1960 1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. А. Амбарцумян, чл.-корр. АН Армянской ССР, и А. А. Хачатрян

Об устойчивости и колебаниях пологой ортотропной цилиндрической панели

(Представлено 25. XI 1959)

1. Рассмотрим пологую цилиндрическую панель, шарнирно опертую по всему контуру и изготовленную из ортотропного материала.

За координатную поверхность принимается срединная поверхность панели, которая представляется координатами: α — вдоль образующей и β — по дуге поперечного сечения, а также радиусом кривизны $R=$ $=\mathrm{const}$. Координатная ось γ направлена по внешней нормали к срединной поверхности панели и меняется в пределах $-h/2 \leqslant \gamma \leqslant \dfrac{h}{2}$ (h — толщина панели).

Пусть в каждой точке панели плоскости упругой симметрии материала перпендикулярны к координатным линиям α, β, γ.

Принимаются следующие гипотезы [1]:

(а) нормальные напряжения σ_γ на площадках, параллельных срединной поверхности, по сравнению с прочими напряжениями значительно малы, поэтому они могут быть пренебрежены;

(б) расстояния по нормали (γ) между двумя точками панели после деформации остаются неизменными;

(в) для касательных напряжений $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ имеем:

$$\tau_{\alpha\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\gamma^2\right)\varphi(\alpha,\beta),\quad \tau_{\beta\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\gamma^2\right)\psi(\alpha,\beta), \tag{1.1}$$

где $\varphi(\alpha,\beta)$, $\psi(\alpha,\beta)$ — произвольные искомые функции.

В работе [2] при рассмотрении равновесия пологих ортотропных оболочек получена разрешающая система четырех дифференциальных уравнений относительно четырех искомых функций: функции напряжений $F(\alpha,\beta)$, нормального перемещения $w(\alpha,\beta)$ и функций $\varphi(\alpha,\beta)$, $\psi(\alpha,\beta)$.

Указанную систему в случае круговой цилиндрической оболочки легко можно привести к следующей системе двух дифференциальных уравнений:

$$
\frac{1}{R}\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2}+\frac{h^3}{12}\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}L_{11}+2\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}L_{12}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}L_{22}-\right.
$$

$$
\left.-\frac{h^2}{10}\left(a_{44}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+a_{55}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)\right]\Phi-Z=0 \tag{1.2}
$$

$$
\frac{1}{\Omega B_{66}}(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)F-\frac{h}{R}\left[1-\frac{h^2}{10}(a_{55}L_{11}+a_{44}L_{22})+\right.
$$

$$
\left.+a_{44}a_{55}\frac{h^4}{100}(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}=0.
$$

Здесь $F(\alpha,\beta)$, $\Phi(\alpha,\beta)$ — искомые функции, через которые внутренние мембранные силы (T_1, T_2, S), нормальное перемещение (w) и функции φ, ψ представляются следующим образом:

$$
T_1=\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2},\quad T_2=\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2},\quad S=-\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\,d\beta}; \tag{1.3}
$$

$$
w=\left[1-\frac{h^2}{10}(a_{55}L_{11}+a_{44}L_{22})+a_{44}a_{55}\frac{h^4}{100}(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)\right]\Phi,
$$

$$
\varphi=-\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}L_{11}+\frac{\partial}{\partial\beta}L_{12}-a_{44}\frac{h^2}{10}\frac{\partial}{\partial\alpha}(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)\right]\Phi, \tag{1.4}
$$

$$
\psi=-\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}L_{12}+\frac{\partial}{\partial\beta}L_{22}-a_{55}\frac{h^2}{10}\frac{\partial}{\partial\beta}(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)\right]\Phi;
$$

Z — интенсивность нормально приложенной поверхностной нагрузки; a_{ik}, B_{ik} — упругие постоянные [3], $\Omega=B_{11}B_{22}-B_{12}^2$,

$$
\begin{aligned}
L_{11}&=B_{11}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+B_{66}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2},\\
L_{12}&=(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta},\\
L_{22}&=B_{66}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+B_{22}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}.
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

В настоящей работе исходной будем считать систему разрешающих уравнений (1.2).

2. Рассмотрим задачу статической устойчивости цилиндрической панели, сжатой вдоль образующих равномерно распределенной нагрузкой, приложенной по торцам и равной P на единицу длины.

В (1.2), полагая [4]

$$
Z=-P\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} \tag{2.1}
$$

и учитывая (1.4), получим следующую систему уравнений статической устойчивости цилиндрической панели

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2}+\frac{h^3}{12}\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}L_{11}+2\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}L_{12}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}L_{22}-\right.$$

$$\left.-\frac{h^2}{10}\left(a_{44}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+a_{55}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)\right]\Phi+P\left[1-\right.$$

$$\left.-\frac{h^2}{10}(a_{55}L_{11}+a_{44}L_{22})+a_{44}a_{55}\frac{h^4}{100}(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}=0 \qquad (2.2)$$

$$\frac{1}{\Omega B_{66}}(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)F-\frac{h}{R}\left[1-\frac{h^2}{10}(a_{55}L_{11}+a_{44}L_{22})+\right.$$

$$\left.+a_{44}a_{55}\frac{h^4}{100}(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}=0.$$

Полагая

$$F=A\sin\lambda_1\alpha\sin\lambda_2\beta$$
$$\Phi=B\sin\lambda_1\alpha\sin\lambda_2\beta \qquad (2.3)$$

(A, B — некоторые постоянные; $\lambda_1=m\pi/a$, $\lambda_2=n\pi/b$ $(m, n=1, 2, 3\cdots)$, a — длина панели, b — длина дуги поперечного сечения панели), удовлетворим условиям шарнирного опирания панели по всему контуру.

Подставляя значения F и Φ из (2.3) в (2.2), относительно коэффициентов A и B получим однородную систему. Приравнивая нулю определитель этой системы, для критической силы получим:

$$P_{mn}^*=\frac{h^3}{12\lambda_1^2}\cdot\frac{\lambda_1^2 l_{11}+2\lambda_1\lambda_2 l_{12}+\lambda_2^2 l_{22}+\frac{h^2}{10}(a_{44}\lambda_1^2+a_{55}\lambda_2^2)(l_{11}l_{22}-l_{12}^2)}{1+\frac{h^2}{10}(a_{55}l_{11}+a_{44}l_{22})+a_{44}a_{55}\frac{h^4}{100}(l_{11}l_{22}-l_{12}^2)}+$$

$$+\frac{h\Omega B_{66}}{R^2}\cdot\frac{\lambda_1^2}{l_{11}l_{22}-l_{12}^2}, \qquad (2.4)$$

где

$$l_{11}=\lambda_1^2 B_{11}+\lambda_2^2 B_{66}$$
$$l_{12}=\lambda_1\lambda_2(B_{12}+B_{66}) \qquad (2.5)$$
$$l_{22}=\lambda_1^2 B_{66}+\lambda_2^2 B_{22}.$$

При безграничном возрастании R второй член выражения (2.4) стремится к нулю, и мы получим значение критической силы шарнирно опертой прямоугольной ортотропной пластинки, сжатой по направлению α [5].

Принимая в (2.4) $a_{44}=a_{55}=0$, получим значение критической силы рассматриваемой задачи, вычисленное по классической теории оболочек.

В случае, когда материал панели представляет собой трансверсально-изотропное тело и плоскости изотропии в каждой точке параллельны срединной поверхности панели, для упругих постоянных имеем:

$$B_{11} = B_{22} = \frac{E}{1-\mu^2}, \quad B_{12} = \frac{\mu E}{1-\mu^2}, \quad B_{66} = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

$$a_{44} = a_{55} = \frac{1}{G'}, \tag{2.6}$$

где E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона в плоскости изотропии; G' — модуль сдвига, характеризующий искажение углов между направлениями α и γ, β и γ.

Учитывая (2.6), из (2.4) для критической силы получим

$$P^*_{mn} = \frac{D}{\lambda_1^2} \cdot \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2}{1 + ka^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} + \frac{Eh}{R^2} \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2}, \tag{2.7}$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \quad k = \frac{1}{10} \cdot \frac{h^2}{a^2} \cdot \frac{E}{(1-\mu^2)G'}. \tag{2.8}$$

Из (2.7) при $k = 0$ получается значение критической силы для изотропной панели, полученное на основании классической теории оболочек ([3]). Отметим, что это совпадение результатов вполне естественно, так как классическая теория оболочек не может различать изотропное тело от трансверсально-изотропного тела.

3. Уравнения свободных колебаний ненагруженной панели получим*, полагая ([6]) в (1.2)

$$Z = -\frac{\gamma_0 h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{3.1}$$

где γ_0 — удельный вес материала панели, g — ускорение силы тяжести.

В силу (1,4) и (3.2) из (1.2) получим:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{h^3}{12} \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} L_{11} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} L_{12} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} L_{22} - \frac{h^2}{10} \left(a_{44} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + a_{55} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) \right] \Phi + \frac{\gamma_0 h}{g} \left[1 - \frac{h^2}{10} (a_{55} L_{11} + a_{44} L_{22}) + \right.$$

$$\left. + a_{44} a_{55} \frac{h^4}{100} (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \tag{3.2}$$

$$\frac{1}{\Omega B_{66}} (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) F - \frac{h}{R} \left[1 - \frac{h^2}{10} (a_{55} L_{11} + a_{44} L_{22}) + \right.$$

$$\left. + a_{44} a_{55} \frac{h^4}{100} (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Принимая

---

* Здесь и в дальнейшем пренебрегается влияние тангенциальных сил инерции.

$$F = A \sin \lambda_1 \alpha \sin \lambda_2 \beta \cos \omega t,$$
$$\Phi = B \sin \lambda_1 \alpha \sin \lambda_2 \beta \cos \omega t, \tag{3.3}$$

где A, B — некоторые постоянные, удовлетворим условиям шарнирного опирания панели по всему контуру.

Подставляя (3.3) в (3.2) и приравнивая нулю определитель полученной однородной системы, для частот собственных колебаний (ω_{mn}) имеем:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{gh^2}{12\gamma_0} \cdot \frac{\lambda_1^2 l_{11} + 2\lambda_1\lambda_2 l_{12} + \lambda_2^2 l_{22} + \frac{h^2}{10}(a_{44}\lambda_1^2 + a_{55}\lambda_2^2)(l_{11} l_{22} - l_{12}^2)}{1 + \frac{h^2}{10}(a_{55} l_{11} + a_{44} l_{22}) + a_{44} a_{55} \frac{h^4}{100}(l_{11} l_{22} - l_{12}^2)} +$$
$$+ \frac{g\Omega B_{66}}{\gamma_0 R^2} \cdot \frac{\lambda_1^4}{l_{11} l_{22} - l_{12}^2}. \tag{3.4}$$

В случае панели, изготовленной из трансверсально-изотропного материала (см. п. 2), из (3.4) получим:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{gD}{\gamma_0 h} \cdot \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2}{1 + ka^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} + \frac{Eg}{\gamma_0 R^2} \cdot \frac{\lambda_1^4}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2}. \tag{3.5}$$

Аналогично задаче статической устойчивости, из (3.4) и (3.5) можно найти формулу для частот собственных колебаний шарнирно опертой прямоугольной ортотропной пластинки [5], а также формулу для частот собственных колебаний трансверсально-изотропной (изотропной) панели, найденной по классической теории оболочек [6].

4. Рассмотрим задачу динамической устойчивости цилиндрической ортотропной панели.

Пусть внешняя нагрузка, равномерно распределенная по торцам панели, меняется периодически во времени:

$$P = P_0 \cos \theta t.$$

Уравнения динамической устойчивости получим [7], полагая в (1.2)

$$Z = -P \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{\gamma_0 h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{4.2}$$

В силу (1.4) и (4.2) из (1.2) получим:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{h^3}{12}\Big| \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} L_{11} + 2\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} L_{12} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} L_{22} -$$
$$- \frac{h^2}{10}\left(a_{44}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + a_{55}\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\right)(L_{11} L_{22} - L_{12}^2)\Big|\Phi + \left(P\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\gamma_0 h}{g}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\times$$
$$\times\Big|1 - \frac{h^2}{10}(a_{55} L_{11} + a_{44} L_{22}) + a_{44} a_{55} \frac{h^4}{100}(L_{11} L_{22} - L_{12}^2)\Big|\Phi = 0 \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{\Omega B_{66}}(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)F-\frac{h}{R}\Big[1-\frac{h^2}{10}(a_{55}L_{11}+a_{44}L_{22})+$$

$$+a_{44}a_{55}\frac{h^4}{100}(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)\Big]\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}=0$$

Принимая

$$F=T_0(t)\sin\lambda_1\alpha\sin\lambda_2\beta,$$
$$\Phi=T(t)\sin\lambda_1\alpha\sin\lambda_2\beta, \qquad (4.4)$$

где T_0, T — некоторые функции только от времени, удовлетворим условиям шарнирного опирания панели по всему контуру.

Подставляя (4.4) в (4.3), далее исключая $T_0(t)$ и учитывая (2.4), (3.4) и (4.1), для $T(t)$ получим известное уравнение Матье:

$$\frac{d^2T}{dt^2}+\omega_{mn}^2(1-2\mu_{mn}\cos\theta t)T=0. \qquad (4.5)$$

где

$$\mu_{mn}=P_0/2P_{mn}^*.$$

Таким образом, определение областей динамической неустойчивости рассматриваемой задачи сводится к нахождению областей неустойчивости решений уравнения Матье, которые хорошо изучены ([8]).

Отметим только, что уравнение (3.5), внешне ничем не отличаясь от аналогичного уравнения, полученного по классической теории оболочек ($a_{44}=a_{55}=0$), содержит принципиальное отличие. Отличие это заключается в том, что в ω_{mn} и μ_{mn} содержатся величины, связанные с коэффициентами a_{44}, a_{55} (чего нет в классической теории), в силу которых вся картина динамической устойчивости может измениться как количественно, так и качественно, как это видно на примере пластинки ([5]).

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР
Ереванский государственный университет

Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ ԵՎ Ս. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Փոքր կորություն ունեցող օրթոտրոպ պանելի կայունության և տատանումների մասին

Հոդվածում դիտարկված են եզրերով հոդակապորեն հենված փոքր կորություն ունեցող օրթոտրոպ պանելի սեփական տատանումների և ստատիկ ու դինամիկ կայունության խնդիրները։

Հետազոտության հիմքում ընկած են հետևյալ հիպոթեզները.

ա) սալի միջին մակերևույթին նորմալ գծային էլեմենտները դեֆորմացիայից հետո չեն փոխում իրենց երկարությունները.

բ) σ_γ նորմալ լարումները կարող են արհամարհվել մյուս լարումների նկատմամբ.

գ) $\tau_{\alpha\gamma}$ և $\tau_{\beta\gamma}$ շոշափող լարումները ըստ պանելի հաստության փոփոխվում են տրված օրենքով (1.1)։

Օգտագործված է (¹) աշխատանքում արված փոքր կորության օրթոտրոպ թաղանթների հավասարակշռության համար ստացված չորս հավասարումներից բաղկացած սիստեմը, որը բերված է (1.3) երկու հավասարումներից բաղկացած սիստեմի։ Այնտեղից հայտնի ճանապարհներով ստացված են ստատիկ կայունության, տատանումների և դինամիկ կայունության հավասարումները։

Լուծված է եզրերով ազատ հենված պանելի ստատիկ կայունության խնդիրը, երբ նա սեղմված է պանելի ծնիչների ուղղությամբ։ Կրիտիկական ուժի համար ստացված է բանաձև, որից որպես մասնավոր դեպք բերված է օրթոտրոպ-իզոտրոպ նյութից պատրաստված պանելի կրիտիկական ուժի արտահայտությունը։

Լուծված է եզրերով ազատ հենված չբեռնավորված պանելի ազատ տատանումների խնդիրը։ Ստացված է բանաձև սեփական տատանումների հաճախականության համար և որպես մասնավոր դեպք բերված է օրթոտրոպ իզոտրոպ նյութից պատրաստված պանելի սեփական տատանումների հաճախականության արտահայտությունը։

Լուծված է ազատ հենված պանելի դինամիկ կայունության խնդիրը, երբ նրա վրա ծնիչի ուղղությամբ ազդող ուժը ժամանակի ընթացքում փոփոխվում է պարբերաբար։ Ցույց է տրված, որ դիտարկված խնդրի անկայունության տիրույթների որոշումը բերվում է Մաթյեի հավասարման լուծմանը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. А. Амбарцумян*. ПММ. АН СССР, XXII, 2 (1958). [2] *С. А. Амбарцумян, Д. В. Пештмалджян*. Изв. АН АрмССР. XII, 1 (1959). [3] *С. Г. Лехницкий*. Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, 1950. [4] *С. П. Тимошенко*. Устойчивость упругих систем. Гостехиздат, 1946. [5] *С. А. Амбарцумян, А. А. Хачатрян*. Изв. АН СССР ОТН, 6 (1959). [6] *А. П. Филиппов*. Колебания упругих систем. Изд. АН УССР, 1953. [7] *В. В. Болотин*. Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, 1956. [8] *Н. В. Мак-Лахлан*. Теория и приложение функций Матье. ИЛ, 1953.