

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. Л. Абрамян

Кручение конических стержней и цилиндрических стержней
 с конической частью

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 2.VI 1959)

При кручении валов переменного сечения функция перемещения $\Psi(r, z)$ в цилиндрических координатах удовлетворяет в области осевого сечения вала уравнению (1, 2)

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Условия для функции $\Psi(r, z)$ на контуре осевого сечения задаются законом распределения скручивающей нагрузки на торцах и боковой поверхности вала.

Рассмотрим полый конический вал (фиг. 1), скручиваемый моментами M_1 и M_2 , приложенными на торцах вала, и произвольной нагрузкой, приложенной по боковым поверхностям вала по степенному закону:

$$M_1 = -2\pi \int_{r_1}^{R_1} r^2 \tau_{\varphi z}(r, a) dr, \quad (2)$$

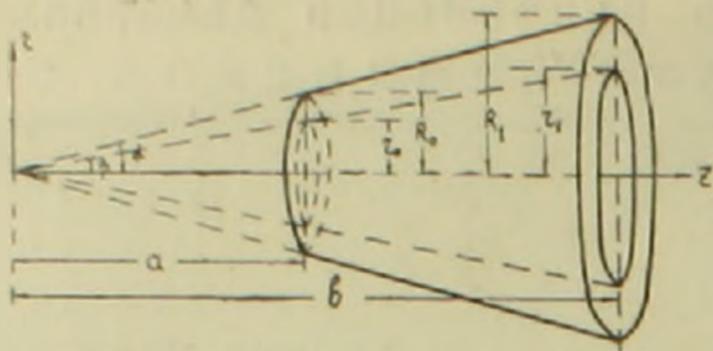
$$M_2 = 2\pi \int_{r_2}^{R_2} r^2 \tau_{\varphi z}(r, b) dr, \quad (3)$$

$$P_v[r(z), z]_{r=ztg\alpha} = f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \left(\frac{z}{b}\right)^k, \quad (4)$$

$$P_v[r(z), z]_{r=ztg\beta} = f_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \left(\frac{z}{b}\right)^k, \quad (5)$$

где $P_v(r, z) = \tau_{r\varphi} \cos(\nu, r) + \tau_{z\varphi} \cos(\nu, z) \quad (6)$

— проекция полного касательного напряжения на нормаль к контуру осевого сечения вала,



Фиг. 1

$$\cos(\nu, r) = \frac{dr}{ds} = \frac{dz}{ds},$$

$$\cos(z, \nu) = \frac{dz}{ds} = -\frac{dr}{ds}. \quad (7)$$

Для определения функции $\Psi(r, z)$ воспользуемся сферическими полярными координатами

$$r = \rho \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta, \quad \Psi(r, z) = \Psi_1(\rho, \theta), \quad (8)$$

где $\vec{\rho}$ — радиус-вектор точки в осевом сечении стержня, а θ — угол наклона радиуса-вектора к оси z ($\beta \leq \theta \leq \alpha$). Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \rho^2} + \frac{4}{\rho} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \theta^2} + \frac{3}{\rho^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} = 0. \quad (9)$$

Решение уравнения (9) ищем в виде

$$\Psi_1(\rho, \theta) = \rho^m \Phi(\theta), \quad (10)$$

где m — пока произвольное постоянное число.

Функция $\Phi(\theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi''(\theta) + 3 \operatorname{ctg} \theta \cdot \Phi'(\theta) + m(m+3)\Phi(\theta) = 0. \quad (11)$$

Пользуясь подстановкой

$$\Phi(\theta) = \varphi(\zeta), \quad \zeta = \cos \theta \quad (12)$$

уравнение (11) приведем к виду

$$(\zeta^2 - 1)\varphi''(\zeta) + 4\zeta\varphi'(\zeta) - m(m+3)\varphi(\zeta) = 0 \quad (13)$$

Общее решение уравнения (13) имеет вид

$$\varphi_n(\zeta) = A P_n'(\zeta) + B Q_n'(\zeta), \quad (14)$$

где

$P_n(\zeta)$ и $Q_n(\zeta)$ — сферические функции Лежандра, соответственно, первого и второго рода⁽¹⁾

$$n = \frac{-1 \pm (2m+3)}{2} \quad (15)$$

Пользуясь соотношениями (10), (14) и (15) и выбирая те решения, для которых n — положительное натуральное число, для функции $\Psi_1(\rho, \theta)$ получим следующее выражение:

$$\Psi_1(\rho, \theta) = \frac{A_0}{\rho^3} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \rho^k P_{k+1}'(\zeta) + \sum_{k=1}^{\infty} E_k \rho^k Q_{k+1}'(\zeta). \quad (16)$$

$$\zeta = \cos \theta$$

В цилиндрических координатах функция перемещения $\Psi(r, z)$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Psi(r, z) &= \frac{A_0}{(r^2 + z^2)^{3/2}} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k (r^2 + z^2)^{\frac{k}{2}} P'_{k+1} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} E_k (r^2 + z^2)^{\frac{k}{2}} Q'_{k+1} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) = \\ &= \frac{A_0}{(r^2 + z^2)^{3/2}} + 3C_1 z + \frac{3}{2} C_2 (4z^2 - r^2) + \frac{5}{2} C_3 (4z^3 - 3z r^2) + \\ &+ \frac{15}{8} C_4 (8z^4 - 12z^2 r^2 + r^4) + \dots \quad \dots + \\ &+ E_1 \left[\frac{3}{2} z \ln \frac{\sqrt{r^2 + z^2} + z}{\sqrt{r^2 + z^2} - z} - \left(2 - \frac{z^2}{r^2} \right) \sqrt{r^2 + z^2} \right] + \dots \quad (17) \end{aligned}$$

Удовлетворив условиям (2) – (5), для определения постоянных интегрирования получим соотношения

$$\left. \begin{aligned} -\frac{M_1}{2\pi G} &= -A_0 a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a^{k+3} (C_k b_k + E_k c_k), \\ \frac{M_2}{2\pi G} &= -A_0 a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b^{k+3} (C_k b_k + E_k c_k), \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} -G \sin^2 \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\cos^k \alpha} [C_k P'_{k+1}(\cos \alpha) + \\ + E_k Q'_{k+1}(\cos \alpha)] &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \left(\frac{z}{b} \right)^k \\ G \sin^2 \beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\cos^k \beta} [C_k P'_{k+1}(\cos \beta) + \\ + E_k Q'_{k+1}(\cos \beta)] &= \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \left(\frac{z}{b} \right)^k. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

При этом использованы следующие обозначения:

$$a_0 = \cos^3 \alpha - \cos^3 \beta + 3(\cos \beta - \cos \alpha), \quad (20)$$

$$b_k = \frac{1}{a^{k+3}} \int_{r_n}^{R_0} r^3 \left[k a (r^2 + a^2)^{\frac{k-2}{2}} P'_{k+1} \left(\frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + r^2 (r^2 + a^2)^{\frac{k-3}{2}} P'_{k+1} \left(\frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) \Big| dr = \\
& = \frac{1}{a^{k+3}(k+3)} \left[r^4 (r^2 + a^2)^{\frac{k-1}{2}} P'_{k+1} \left(\frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) \right] \Big|_{r_0}^{R_0} = \\
& = \frac{1}{k+3} \left[\frac{\sin^4 \alpha}{\cos^{k+3} \alpha} P'_{k+1} (\cos \alpha) - \frac{\sin^4 \beta}{\cos^{k+3} \beta} P'_{k+1} (\cos \beta) \right], \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_k & = \frac{1}{b^{k+3}} \int_{r_1}^{R_1} r^3 \left[kb (r^2 + b^2)^{\frac{k-2}{2}} Q'_{k+1} \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right) + \right. \\
& \quad \left. + r^2 (r^2 + b^2)^{\frac{k-3}{2}} Q'_{k+1} \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right) \right] dr = \\
& = \frac{1}{(k+3)b^{k+3}} \left[r^4 (r^2 + b^2)^{\frac{k-1}{2}} Q'_{k+1} \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right) \right] \Big|_{r_1}^{R_1} = \\
& = \frac{1}{k+3} \left[\frac{\sin^4 \alpha}{\cos^{k+3} \alpha} Q'_{k+1} (\cos \alpha) - \frac{\sin^4 \beta}{\cos^{k+3} \beta} Q'_{k+1} (\cos \beta) \right]. \quad (22)
\end{aligned}$$

Приравнявая в соотношениях (19) коэффициенты при равных степенях z и разрешая полученные равенства относительно C_k и E_k , получим

$$C_k = \frac{q_k}{b^k}, \quad E_k = \frac{p_k}{b^k}, \quad (23)$$

где введены обозначения

$$q_k = \frac{\beta_k h_k - \gamma_k H_k}{N_k h_k - n_k H_k}, \quad p_k = \frac{\gamma_k N_k - \beta_k n_k}{N_k h_k - n_k H_k}, \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned}
N_k & = \frac{G \sin^2 \alpha P'_{k+1} (\cos \alpha)}{\cos^k \alpha}, & H_k & = \frac{G \sin^2 \alpha Q'_{k+1} (\cos \alpha)}{\cos^k \alpha} \\
n_k & = \frac{G \sin^2 \beta P'_{k+1} (\cos \beta)}{\cos^k \beta}, & h_k & = \frac{G \sin^2 \beta Q'_{k+1} (\cos \beta)}{\cos^k \beta}
\end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Пользуясь значениями (23), из (18) получим

$$A_0 = \frac{M_1}{2\pi G a_0} + \frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k+3}}{b^k} (q_k b_k + p_k c_k), \quad (26)$$

$$\frac{M_1 + M_2}{2\pi G} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^{k+3} - a^{k+3}}{b^k} (q_k b_k + p_k c_k). \quad (27)$$

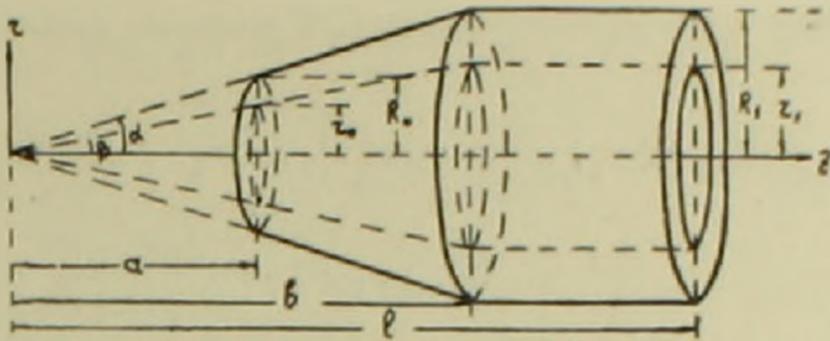
Соотношение (27) является уравнением равновесия скручивающихся валов нагрузок.

В частном случае, когда $\beta = 0$ и боковая поверхность свободна от нагрузок, получаем:

$$A_0 = \frac{M_1}{2\pi G (2 - 3\cos \alpha + \cos^3 \alpha)}, \quad C_k = E_k = 0, \quad M_1 = -M_2, \quad (28)$$

то есть: из (17) получается решение А. Феппля (2).

Рассмотрим полый вал переменного сечения, имеющий форму полого усеченного конуса в одной части и полого круглого цилиндра в другой части (фиг. 2). Пусть вал скручивается моментами M_1 и M_2 , приложенными на торцах; произвольной степенной нагрузкой, приложенной на боковых по-



Фиг. 2.

верхностям конической части и произвольной нагрузкой, приложенной на боковых поверхностях цилиндрической части.

Для этой задачи граничные условия задаются такими же соотношениями (2) — (5), а также

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\varphi r}(R_1, z) &= f_3(z) \\ \tau_{\varphi r}(r_1, z) &= f_4(z) \end{aligned} \right\} (b < z < l), \quad (29)$$

где функции f_3 и f_4 — кусочно-непрерывны и имеют ограниченное изменение в указанном интервале.

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$\Psi(r, z) = \begin{cases} \Psi_1(r, z) & (a < z < b) \\ \Psi_2(r, z) & (b < z < l). \end{cases} \quad (30)$$

При этом, кроме соответствующих граничных условий, на линии контакта конической и цилиндрической областей осевого сечения функции Ψ_1 и Ψ_2 должны удовлетворять условиям сопряжения

$$\Psi_1(r, b) = \Psi_2(r, b), \quad \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \right)_{z=b} = \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \right)_{z=b}. \quad (31)$$

Функции Ψ_1 и Ψ_2 берем в виде

$$\begin{aligned} \Psi_1(r, z) &= \frac{A_0}{(r^2 + z^2)^{3/2}} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k (r^2 + z^2)^{\frac{k}{2}} P'_{k+1} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} E_k (r^2 + z^2)^{\frac{k}{2}} Q'_{k+1} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right), \quad (a < z < b) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\Psi_2(r, z) = A_z + D + \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k I_1(\lambda_k r) + B_k K_1(\lambda_k r) \right] \sin^{\lambda_k} (z - b) +$$

$$+ \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} (F_k \operatorname{sh} \mu_k z + D_k \operatorname{ch} \mu_k z) W_1(\mu_k r) \quad (b < z < l), \quad (33)$$

где $\lambda_k = \frac{k\pi}{l-b}$, а μ_k — корни уравнения

$$W_2(x r_1) = 0 \text{ или } J_2(x r_1) Y_2(x R_1) - J_2(x R_1) Y_2(x r_1) = 0, \quad (34)$$

$$W_n(\mu_k r) = \frac{J_n(\mu_k r)}{J_2(\mu_k R_1)} - \frac{Y_n(\mu_k r)}{Y_2(\mu_k R_1)}, \quad (35)$$

$J_i(x)$ и $Y_i(x)$ — функции Бесселя i -го порядка, соответственно, первого и второго рода с действительным аргументом, $I_i(x)$ и $K_i(x)$ — функции Бесселя первого и второго рода от мнимого аргумента (6).

Для функции $W_n(\mu_k r)$ справедливы следующие формулы:

$$\int_{r_1}^{R_1} r W_1(\mu_k r) W_1(\mu_p r) dr = \frac{\mu_k}{\mu_p} \int_{r_1}^{R_1} r W_2(\mu_k r) W_2(\mu_p r) dr =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } p \neq k \\ \omega_k & \text{при } p = k, \end{cases} \quad (36)$$

где

$$\omega_k = \frac{1}{2} \left\{ |R_1 W_1(\mu_k R_1)|^2 - |r_1 W_1(\mu_k r_1)|^2 \right\}. \quad (37)$$

Удовлетворив условиям (2)—(5), (29) и (31), для постоянных интегрирования получаем значения (23), (26), а также

$$A = \frac{4}{R_1^4 - r_1^4} \left\{ \frac{M_2}{2\pi G} + \frac{1}{G} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\lambda_k} (d_k r_1^2 - a_k R_1^2) \right\}, \quad (38)$$

$$D = \frac{4b}{R_1^4 - r_1^4} \left\{ \frac{d_0}{a_0} \left[\frac{M_1}{2\pi G} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k+3}}{b^k} (b_k q_k + p_k c_k) \right] + \right.$$

$$\left. + b^3 \sum_{k=1}^{\infty} (q_k f_k + p_k g_k) - \frac{M_2}{2\pi G} + \frac{1}{G} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\lambda_k} (a_k R_1^2 - d_k r_1^2) \right\}, \quad (39)$$

$$A_k = \frac{d_k K_2(\lambda_k R_1) - a_k K_2(\lambda_k r_1)}{G \lambda_k \Delta_k(r_1, R_1)},$$

$$B_k = \frac{d_k I_2(\lambda_k R_1) - a_k I_2(\lambda_k r_1)}{G \lambda_k \Delta_k(r_1, R_1)}, \quad (40)$$

$$\left. \begin{aligned} F_k &= \frac{1}{\omega_k} (L_k \operatorname{ch} \mu_k b - M_k \operatorname{sh} \mu_k b) \\ D_k &= \frac{1}{\omega_k} (M_k \operatorname{ch} \mu_k b - L_k \operatorname{sh} \mu_k b) \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

При этом использованы обозначения

$$d_k = \frac{2}{l-b} \int_b^l f_4(z) \sin \lambda_k (z-b) dz, \quad a_k = \frac{2}{l-b} \int_b^l f_3(z) \sin \lambda_k (z-b) dz \quad (42)$$

$$\Delta_k(x, y) = I_2(\lambda_k x) K_2(\lambda_k y) - I_2(\lambda_k y) K_2(\lambda_k x) \quad (43)$$

$$\left. \begin{aligned} d_0 &= \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} - \frac{1 + \cos^2 \beta}{\cos \beta} \\ f_k &= \frac{1}{b^{k+4}} \int_{r_1}^{R_1} r^3 (r^2 + b^2)^{\frac{k}{2}} P'_{k+1} \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right) dr \\ g_k &= \frac{1}{b^{k+4}} \int_{r_1}^{R_1} r^3 (r^2 + b^2)^{\frac{k}{2}} Q'_{k+1} \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right) dr \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} M_k &= A_0 \int_{r_1}^{R_1} \frac{r^2 W_1(\mu_k r) dr}{(r^2 + b^2)^{3/2}} + \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{q_s}{b^s} \int_{r_1}^{R_1} r^2 (r^2 + b^2)^{\frac{s}{2}} P'_{s+1} \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right) W_1(\mu_k r) dr + \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{p_s}{b^s} \int_{r_1}^{R_1} r^2 (r^2 + b^2)^{\frac{s}{2}} Q'_{s+1} \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right) W_1(\mu_k r) dr, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} L_k &= \frac{1}{\mu_k} \left\{ -3A_0 b \int_{r_1}^{R_1} \frac{r^2 W_1(\mu_k r) dr}{(r^2 + b^2)^{3/2}} + \right. \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{q_s}{b^s} \int_{r_1}^{R_1} r^2 \left[sb (r^2 + b^2)^{\frac{s-2}{2}} P'_{s+1} \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right) + \right. \\ &+ \left. \left. r^2 (r^2 + b^2)^{\frac{s-3}{2}} P'_{s+1} \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right) \right] W_1(\mu_k r) dr + \right. \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{p_s}{b^s} \int_{r_1}^{R_1} r^2 \left[sb (r^2 + b^2)^{\frac{s-2}{2}} Q'_{s+1} \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + r^2 (r^2 + b^2)^{\frac{s-3}{2}} Q_{s+1} \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right) \Big| W_1(\mu_k r) dr - \\
& - \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s \left[A_s \int_{r_1}^{R_1} r I_1(\lambda_s r) W_1(\mu_k r) dr + \right. \\
& \left. + B_s \int_{r_1}^{R_1} r K_1(\lambda_s r) W_1(\mu_k r) dr \right] \Bigg\}, \tag{46}
\end{aligned}$$

а уравнение равновесия скручивающих моментов будет иметь вид

$$\frac{M_1 + M_2}{2\pi G} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^{k+3} - a^{k+3}}{b^k} (b_k q_k + p_k c_k) - \frac{2}{G} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{R_1^2 a_k - r_1^2 d_k}{\lambda_k}. \tag{47}$$

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

F. L. AFRUZANZIAN

Կոնական և կոնական մասով գլանաձև ձողերի ոլորումը

Դիտարկվում է կոնական և կոնական մասով դլանաձև սնամեջ ձողերի ոլորման խնդիրը: Ինքնազրկում է, որ ձողը կամ լիսեռ ոլորվում է հիմքերի վրա կիրառված մոմենտներով և կողմնային մակերևույթի վրա կամավոր ձևով կիրառված ոլորող ուժերով:

Խնդիրը լուծվում է Ա. Ֆեպլի տեղափոխության¹ Ֆունկցիայով, որը լիսեռի առանցքային կտրվածքի տիրույթում բավարարում է (1) հավասարմանը: Այդ ֆունկցիան որոշելու համար լիսեռի առանցքային կտրվածքը բաժանվում է երկու պարզագույն տիրույթների:

Այդ տիրույթներից կոնական մասում² Ֆունկցիան որոշվում է Լեժանդրի դնդային ֆունկցիաների օգնությամբ: Գլանաձև մասում³ Ֆունկցիան որոշվում է եռանկյունաչափական, հիպերբոլիկ և Բեսսելի ֆունկցիաների օգնությամբ:

Խնդրի եզրային պայմանների բավարարման ժամանակ լիսեռի կոնական մասի կողմնային մակերևույթի վրա կիրառված բեռը ներկայացվում է աստիճանային շարքով: Գլանաձև մասի կողմնային մակերևույթի վրա կիրառված բեռը ներկայացվում է բաժանկյունաչափական ֆունկցիաների Ֆուրյեի շարքով:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱՇԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С. П. Тимошенко, Теория упругости. М., 1937. ² А. Фенпль, Über die Torsion von runden Stäben mit Veränderlichen Durchmesser, Sitzungsberichte Bayerische Akademie der Wissenschaften, München, Bd. 35, 1905, 249—262, Berichtigung 504. ³ Е. В. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций, Иноиздат, М., 1952. ⁴ В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. 2, М.—Л., 1951. ⁵ Б. Л. Абрамян, ПММ, т. 22, вып. 5 (1958), 679—683. ⁶ Э. Грей, Г. Б. Мэтьюз, Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, Госиноиздат, М., 1953.