ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXX 1960 1

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Р. С. Минасян

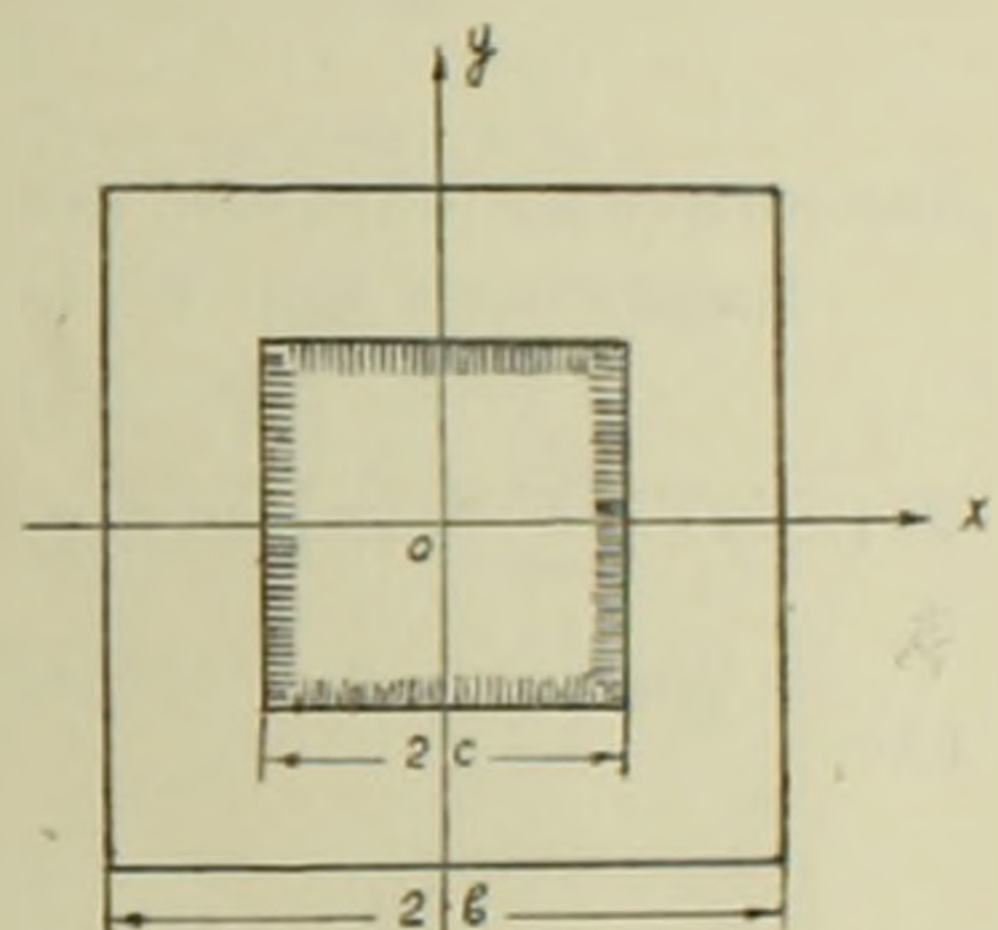
О смешанной задаче изгиба квадратной пластинки с квадратным вырезом

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 5. X 1959)

В данной заметке приводится решение задачи поперечного изгиба квадратной пластинки с квадратным вырезом, опертой по наружному и закрепленной по внутреннему контуру (фиг. 1), под действием нормально приложенной нагрузки $P(x, y)$.

1. Прогиб $W(x, y)$ пластинки, как известно [1], удовлетворяет уравнению

$$\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\left[\frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial y^4}\right]=P(x, y), \tag{1}$$



Фиг. 1.

где E — модуль упругости пластинки, h — ее толщина, σ — коэффициент Пуассона, и граничным условиям

$$W(x; \pm b)=\left.\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2}\right|_{y=\pm b}=W(\pm b; y)=\left.\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2}\right|_{x=\pm b}=0;$$

$$W(x, \pm c)=\left.\frac{\partial W(x, y)}{\partial y}\right|_{y=\pm c}=0; \quad W(\pm c; y)=\left.\frac{\partial W(x; y)}{\partial x}\right|_{x=\pm c}=0. \tag{2}$$

$$(-c \leqslant x \leqslant c) \qquad\qquad (-c < y < c)$$

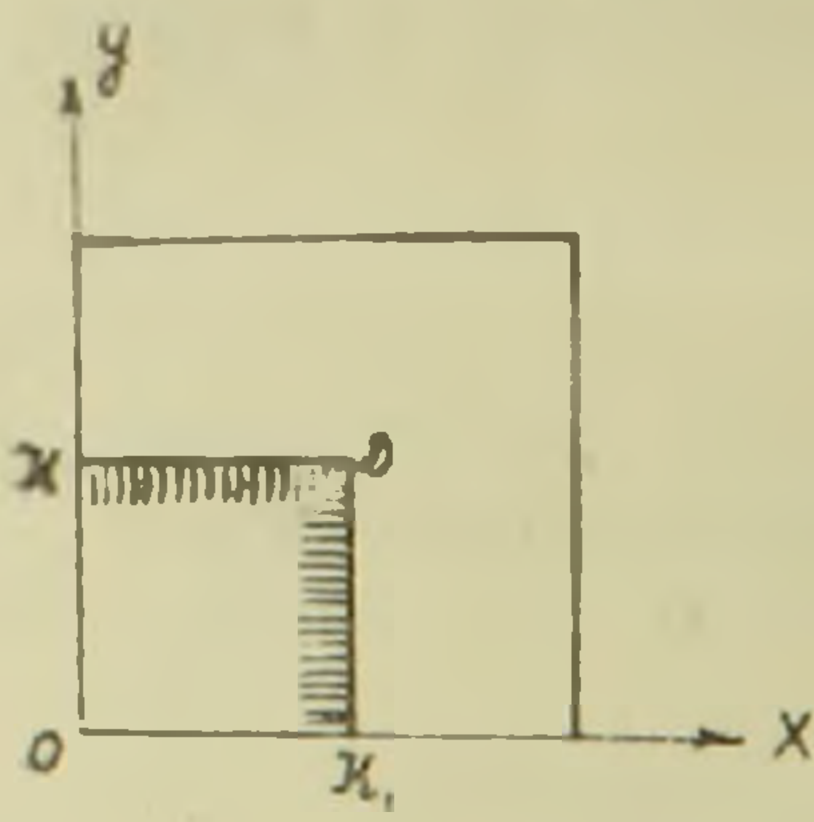
Для простоты ограничимся случаем симметрии относительно осей координат и диагоналей. В силу симметрии достаточно рассмотреть четвертую часть пластинки (фиг. 2), причем на осях координат должны выполняться условия

$$\left.\frac{\partial W(x, y)}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial W(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial^3 W(x, y)}{\partial x^3}\right|_{x=0}=$$

$$= \frac{\partial^3 W(x, y)}{\partial y^3}\bigg|_{y=0} = 0 \qquad (3)$$

кроме того, $W(x, y) = W(y, x)$.

Прежде чем перейти к решению, обозначим



Фиг. 2.

$$\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} = U(x, y), \qquad (4)$$

тогда, согласно (1) и (4), имеем

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} =$$

$$= \frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3} P(x, y). \qquad (5)$$

Представим, далее, функцию $W(x, y)$ в виде[2]

$$W(x, y) = \begin{cases} W_1(x, y) \text{ при } c < y \leqslant b \\ W_2(x, y) \text{ при } 0 < y < c. \end{cases} \qquad (6)$$

Аналогичным образом представим функцию $U(x, y)$.

Выражения для $W_1(x, y)$ и $U_1(x, y)$ ищем в виде рядов Фурье[3]

$$W(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \sin \alpha_k (y - c); \quad U_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \sin \alpha_k (y - c), \qquad (7)$$

где

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{b-c}; \quad f_k(x) = \frac{2}{b-c}\int_c^b W_1(x, y) \sin \alpha_k (y - c)\, dy;$$

$$\varphi_k(x) = \frac{2}{b-c}\int_c^b U_1(x, y) \sin \alpha_k (y - c)\, dy. \qquad (8)$$

Для нахождения коэффициентов $f_k(x)$ и $\varphi_k(x)$ умножим уравнения (4) и (5) на $\frac{2}{b-c} \sin\alpha_k (y-c)\, dy$ и проинтегрируем от c до b. Интегрируя по частям и принимая во внимание граничные условия (2), получим

$$f_k''(x) - \alpha_k^2 f_k(x) + \frac{2\alpha_k S(x)}{b-c} = \varphi_k(x)$$

$$\varphi_k''(x) - \alpha_k^2 (x) + \frac{2\alpha_k S^*(x)}{b-c} = \frac{2}{b-c} p_k(x). \qquad (9)$$

Здесь обозначено

$$S(x) = W(x, c);\ S^*(x) = U(x, c);$$

$$p_k(x) = \frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3}\int\limits_c^b P(x, y)\sin\alpha_k(y-c)\,dy. \tag{10}$$

Решая уравнения (9) и выполняя соответствующие граничные условия (2) и (3), будем иметь

$$\varphi_k(x) = \frac{2}{\alpha_k(b-c)\operatorname{ch}\alpha_k b}\left\{\operatorname{ch}\alpha_k x\int\limits_x^b[\alpha_k S^*(t) - p_k(t)]\operatorname{sh}\alpha_k(b-t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sh}\alpha_k(b-x)\int\limits_0^x[\alpha_k S^*(t) - p_k(t)]\operatorname{ch}\alpha_k t\,dt\right\}; \tag{11}$$

$$f_k(x) = \frac{2}{(b-c)\operatorname{ch}\alpha_k b}\left\{\operatorname{ch}\alpha_k x\int\limits_x^b\left[S(t) - \frac{1}{2\alpha_k^3}(\alpha_k S^*(t) - \right.\right.$$

$$- p_k(t))(1 - \alpha_k(b-t)\operatorname{cth}\alpha_k(b-t) - \alpha_k x \operatorname{th}\alpha_k x +$$

$$\left. + \alpha_k b\operatorname{th}\alpha_k b)\right]\operatorname{sh}\alpha_k(b-t)\,dt + \operatorname{sh}\alpha_k(b-x)\int\limits_x^b\left[S(t) - \right.$$

$$- \frac{1}{2\alpha_k^3}(\alpha_k S^*(t) - p_k(t))(1 - \alpha_k(b-x)\operatorname{cth}\alpha_k(b-x) - \alpha_k t\operatorname{th}\alpha_k t +$$

$$\left.\left. + \alpha_k b\operatorname{th}\alpha_k b)\right]\operatorname{ch}\alpha_k t\,dt\right\}.$$

В выражения для $\varphi_k(x)$ и $f_k(x)$ входят неизвестные значения $S^*(x)$ и $S(x)$. Прежде чем перейти к их определению, заметим следующее: оба ряда, входящие в (7), обладают слабой сходимостью, первый — в промежутке (c, b), а второй — в $(0, b)$. Ее можно усилить, выделив выражения, обусловливающие слабую сходимость:

$$W_1(x, y) = \left(1 - \frac{y-c}{b-c}\right)\left\{S(x) + \frac{y-c}{6}(2b-c-y)[S^*(x) - S''(x)]\right\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left[f_k(x) - 2\,\frac{\alpha_k^2 S(x) - S^*(x) + S''(x)}{\alpha_k^3(b-c)}\right]\sin\alpha_k(y-c) \tag{12}$$

$$U_1(x, y) = \left(1 - \frac{y-c}{b-c}\right)S^*(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_k(x) - \right.$$

$$-\frac{2S^*(x)}{\alpha_k(b-c)}\Bigg]\sin\alpha_k(y-c).$$

Для определения значения $S^*(x)$ в $(0, c)$ выполним условие равенства нулю угла поворота пластинки на стороне KD:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i f_i(x)=0. \qquad (13)$$

Умножив (13) на $\frac{2}{c}\cos\beta_k x\,dx$, где $\beta_k=\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{c}$, и проинтегрировав от 0 до c, получим

$$a_k=\frac{8(-1)^{k+1}\beta_k^2\,\mathrm{sh}^2\beta_k(b-c)}{c\,[\mathrm{sh}\,2\beta_k(b-c)-2\beta_k(b-c)]}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{\alpha_i^2+\beta_k^2}\Bigg[f_i(c)-$$

$$-\frac{\varphi_i(c)}{\alpha_i^2+\beta_k^2}\Bigg]+q_k. \qquad (14)$$

Здесь обозначено

$$a_k=\frac{2}{c}\int_0^c S^*(x)\cos\beta_k x\,dx;$$

$$q_k=\frac{48(1-\sigma^2)\,\mathrm{sh}\,\beta_k(b-c)}{Eh^3c\,[\mathrm{sh}2\beta_k(b-c)-2\beta_k(b-c)]}\int_0^c\int_c^b P(x,y)[(b-c)\times$$

$$\times\mathrm{cth}\beta_k(b-c)-(b-y)\,\mathrm{cth}\beta_k(b-y)]\,\mathrm{sh}\beta_k(b-y)\cos\beta_k x\,dx\,dy. \qquad (15)$$

Для неизвестных $f_k(c)$ и $\varphi_k(c)$, входящих в (14), из выражений (11), а также принимая во внимание, что в промежутке (c, b)

$$S(x)=\sum_{i=1}^{\infty}f_i(c)\sin\alpha_i(x-c);\quad S^*(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(c)\sin\alpha_i(x-c), \qquad (16)$$

получим

$$f_k(c)=\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_k c\,\mathrm{sh}\alpha_k(b-c)}{(b-c)\,\mathrm{ch}\alpha_k b}\Bigg[2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i f_i(c)}{\alpha_i^2+\alpha_k^2}-$$

$$-\frac{1}{\alpha_k^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i\varphi_i(c)}{\alpha_i^2+\alpha_k^2}\left(\frac{\alpha_i^2+3\alpha_k^2}{\alpha_i^2+\alpha_k^2}+\xi_k\right)+$$

$$+\frac{1}{\alpha_k^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i\beta_i a_i}{\beta_i^2+\alpha_k^2}\left(\frac{\beta_i^2+3\alpha_k^2}{\beta_i^2+\alpha_k^2}+\zeta_k\right)\Bigg]+r_k; \qquad (17)$$

$$\varphi_k(c) + \frac{2\operatorname{ch}\alpha_k c \operatorname{sh}\alpha_k(b-c)}{(b-c)\operatorname{ch}\alpha_k(b-c)}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i\varphi_i(c)}{\alpha_i^2+\alpha_k^2} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i\beta_i a_i}{\beta_i^2+\alpha_k^2}\right] + t_k,$$

где

$$\zeta_k = \alpha_k\frac{(b-c)\operatorname{ch}^2\alpha_k c - c\operatorname{sh}^2\alpha_k(b-c)}{\operatorname{sh}\alpha_k(b-c)\operatorname{ch}\alpha_k c\operatorname{ch}\alpha_k b}$$

$$r_k = \frac{1}{2\alpha_k^3\operatorname{ch}\alpha_k b}\Big\{\operatorname{ch}\alpha_k c\int_c^b p_k(t)\left[1-\alpha_k(b-t)\operatorname{cth}\alpha_k(b-t) - \alpha_k\operatorname{cth}\alpha_k c +\right.$$

$$\left.+\alpha_k b\operatorname{th}\alpha_k b\right]\operatorname{sh}\alpha_k(b-t)\,dt + \operatorname{sh}\alpha_k(b-c)\int_0^c p_k(t)\left[1-\alpha_k(b-c)\operatorname{cth}\alpha_k(b-c) - \right.$$

$$\left.-\alpha_k t\operatorname{th}\alpha_k t + \alpha_k b\operatorname{th}\alpha_k b\right]\operatorname{ch}\alpha_k t\,dt\Big\};$$

$$t_k = -\frac{1}{\alpha_k\operatorname{ch}\alpha_k b}\left[\operatorname{ch}\alpha_k c\int_c^b p_k(t)\operatorname{sh}\alpha_k(b-t)\,dt +\right.$$

$$\left.+\operatorname{sh}\alpha_k(b-c)\int_0^c p_k(t)\operatorname{ch}\alpha_k t\,dt\right]. \qquad (18)$$

Заметим, что, согласно (15), в промежутке $(0, c)$

$$S^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\beta_k x. \qquad (19)$$

2. Выполнение граничных условий задачи привело к совокупности трех систем линейных алгебраических уравнений (14) и (17) для определения неизвестных постоянных a_k, $f_k(c)$ и $\varphi_k(c)$. Преобразуем эти системы с целью их регуляризации. Обозначив

$$m_k = \alpha_k(b-c)\left[\varphi_k(c) + \alpha_k^2 f_k(c)\right]; \quad n_k = \alpha_k^3(b-c)f_k(c);$$

$$a_k^* = 12(-1)^{k+1}\beta_k c a_k + \frac{48\beta_k}{b-c}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i^2 n_i + \beta_k^2 m_i}{(\alpha_i^2+\beta_k^2)^2}, \qquad (20)$$

после некоторых преобразований окончательно получим

$$m_k = \frac{\alpha_k\operatorname{ch}\alpha_k c\operatorname{sh}\alpha_k(b-c)}{(b-c)\operatorname{ch}\alpha_k b}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha_i^2+\alpha_k^2}\left(\frac{\alpha_i^2-\alpha_k^2}{\alpha_i^2+\alpha_k^2}+\zeta_k\right) - H_1(i;k) - \right.\right.$$

$$- \zeta_k L_1(i;k) \Big] m_i - \sum_{i=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{\alpha_i^2 + \alpha_k^2} \Big(\frac{3\alpha_i^2 + \alpha_k^2}{\alpha_i^2 + \alpha_k^2} + \zeta_k \Big) + H_2(i;k) +$$

$$+ \zeta_k L_2(i;k) \Big] n_i + \frac{1}{12} \Big(\frac{b}{c} - 1 \Big) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_i^2 + \alpha_k^2} \Big(\frac{\beta_i^2 - \alpha_k^2}{\beta_i^2 + \alpha_k^2} + \zeta_k \Big) a_i^* \Big\} + r_k^*;$$

$$n_k = - \frac{\alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k c \operatorname{sh} \alpha_k (b-c)}{(b-c) \operatorname{ch} \alpha_k b} \Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{\alpha_i^2 + \alpha_k^2} \Big(\frac{\alpha_i^2 + 3\alpha_k^2}{\alpha_i^2 + \alpha_k^2} - \zeta_k \Big) - H_3(i;k) +$$

$$+ \zeta_k L_1(i;k) \Big] m_i + \sum_{i=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{\alpha_i^2 + \alpha_k^2} \Big(\frac{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}{\alpha_i^2 + \alpha_k^2} + \zeta_k \Big) - H_4(i;k) +$$

$$+ \zeta_k L_2(i;k) \Big] n_i + \frac{1}{12} \Big(\frac{b}{c} - 1 \Big) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_i^2 + \alpha_k^2} \Big(\frac{\beta_i^2 + 3\alpha_k^2}{\beta_i^2 + \alpha_k^2} -$$

$$- \zeta_k \Big) a_i^* \Big\} + t_k^*; \qquad (21)$$

$$a_k^* = - \frac{48 \beta_k [2\beta_k (b-c) - 1 + e^{-2\beta_k (b-c)}]}{(b-c) [\operatorname{sh} 2\beta_k (b-c) - 2\beta_k (b-c)]} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_k^2 m_i + \alpha_i^2 n_i}{(\alpha_i^2 + \beta_k^2)^2} + q_k^*.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$r_k^* = \alpha_k (b-c) (\alpha_k^2 r_k + t_k); \; t_k^* = \alpha_k^3 (b-c) r_k; \; q_k^* = 12(-1)^{k+1} \beta_k c q_k;$$

$$H_1(i;k) = \frac{1}{(\alpha_i^2 - \alpha_k^2)^3} \{ (\alpha_i^4 - 6\alpha_i^2 \alpha_k^2 - 3\alpha_k^4) \Phi(i) + (\alpha_i^4 - \alpha_k^4) \Psi(i) + 2\alpha_k^2 [4\alpha_i^2 \times$$

$$\times \Phi(k) - (\alpha_i^2 - \alpha_k^2) \Psi(k)] \};$$

$$H_2(i;k) = \frac{1}{(\alpha_i^2 - \alpha_k^2)^2} \{ (\alpha_i^4 + 6\alpha_i^2 \alpha_k^2 + \alpha_k^4) \Phi(i) - (\alpha_i^4 - \alpha_k^4) \Psi(i) -$$

$$- 2\alpha_i^2 [2(\alpha_i^2 + \alpha_k^2) \Phi(k) + (\alpha_i^2 - \alpha_k^2) \Psi(k)] \};$$

$$H_3(i,k) = \frac{1}{(\alpha_i^2 - \alpha_k^2)^3} \{ (\alpha_i^4 - 2\alpha_i^2 \alpha_k^2 + 9\alpha_k^4) \Phi(i) + (\alpha_i^2 - \alpha_k^2)(\alpha_i^2 - 3\alpha_k^2) \times$$

$$\times \Psi(i) - 2\alpha_k^2 [2(\alpha_i^2 + \alpha_k^2) \Phi(k) + (\alpha_i^2 - \alpha_k^2) \Psi(k)] \}; \qquad (22)$$

$$H_4(i;k) = \frac{1}{(\alpha_i^2 - \alpha_k^2)^3} \{ (\alpha_i^4 - 6\alpha_i^2 \alpha_k^2 - 3\alpha_k^4) \Phi(i) - (\alpha_i^2 - \alpha_k^2)(\alpha_i^2 - 3\alpha_k^2) \times$$

$$\times \Psi(i) + 2\alpha_i^2 [4\alpha_k^2 \Phi(k) + (\alpha_i^2 - \alpha_k^2) \Psi(k)] \};$$

$$L_1(i;k) = \frac{1}{2}[H_1(i;k) + H_2(i;k)];\ L_2(i;k) = \frac{1}{2}[H_2(i;k) + H_4(i;k)]$$

$$\Phi(k) = \frac{2\alpha_k}{\pi \mathrm{ch}\alpha_k c}\int_0^c \ln \mathrm{ctg}\frac{\pi(c-t)}{4c}\cdot \mathrm{sh}\,\alpha_k t dt;$$

$$\Psi(k) = \frac{2\alpha_k^2}{\pi \mathrm{ch}\alpha_k c}\int_0^c \ln \mathrm{ctg}\frac{\pi(c-t)}{4c}\cdot(t\mathrm{cth}\alpha_k t - c\mathrm{th}\alpha_k c)\mathrm{sh}\alpha_k t dt.$$

Исследуем полученную совокупность трех бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (21). Произведенные оценки показывают, что сумма модулей коэффициентов k—го уравнения первой из систем (21), начиная с $k > \frac{1,15}{\pi}\left(\frac{b}{c} - 1\right)$ (или, что одно и то же, для $\frac{b}{c} > \left[1 + \frac{k\pi}{1,15}\right]^{-1}$), будет меньше 0,75, а второй из систем (21) — меньше 0,8; что касается третьей системы, то, начиная от значений k таких, что $\frac{b}{c} > 1 + \frac{7}{4(2k+1)}$, сумма модулей коэффициентов k-го уравнения этой системы становится меньше единицы и быстро стремится к нулю со скоростью $\frac{48\beta_k(b-c)}{sh\,2\beta_k(b-c)}$.

При этом, как легко видеть из (22), (15) и (18), свободные члены r_k^*, t_k^*, q_k^* стремятся к нулю со скоростью $\frac{1}{k}\cdot$ Согласно общей теории бесконечных систем[4], совокупность систем (2.2) имеет единственное ограниченное решение, получаемое методом последовательных приближений.

Как нетрудно видеть, неизвестные m_k, n_k и a_k^*, начиная с некоторого $k = k_1$, зависящего от отношения сторон c и b, стремятся к нулю со скоростью $\frac{C}{k^{0,5}}$, причем постоянная C определится из максимального значения отношений свободных членов k-го уравнения и разности между единицей и суммой модулей коэффициентов [4].

3. Перейдем теперь к нахождению выражений для прогиба $W(x,y)$ и составляющих напряжений X_x, Y_y и X_y.

Подставляя в (11) выражения $S(x)$ и $S^*(x)$ из (16) и (19) и принимая во внимание (20), после некоторых преобразований получим из (7):

$$W(x,y) = \frac{1}{b-c}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_k(y-c)}{\alpha_k^3\mathrm{ch}\alpha_k c}\left\{\mathrm{ch}\alpha^k x\left[n_k + \alpha_k(x\mathrm{th}\alpha_k x - \right.\right.$$

$$-\operatorname{cth}\alpha_k c)(m_k - n_k) + (b-c)\int\limits_x^c p_k(t)\,(1 - \alpha_k(c-t)\operatorname{cth}\alpha_k(c-t) -$$

$$-\alpha_k x\operatorname{th}\alpha_k x + \alpha_k\operatorname{cth}\alpha_k c)\operatorname{sh}\alpha_k(c-t)\,\mathrm{dt}\Big] +$$

$$+(b-c)\operatorname{sh}\alpha_k(c-x)\int\limits_0^x p_k(t)\,[1 - \alpha_k(c-x)\operatorname{cth}\alpha_k(c-x) - \alpha_k t\operatorname{th}\alpha_k t +$$

$$+\alpha_k\operatorname{cth}\alpha_k c]\operatorname{ch}\alpha_k t\,\mathrm{dt}\Big| + \frac{1}{2c}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\eta_k\operatorname{sh}\beta_k(b-y)}{\beta_k^2\operatorname{sh}\beta_k(b-c)}\,[(b-c)\operatorname{cth}\beta_k(b-c) -$$

$$-(b-y)\operatorname{cth}\beta_k(b-y)]\cos\beta_k x dx \qquad (23)$$

при $0 \leqslant x \leqslant c$.

Здесь

$$\eta_k = (-1)^{k+1}\beta_k c a_k. \qquad (24)$$

При $c < x \leqslant b$, $c \leqslant y < b$ аналогичным образом получим:

$$W(x,y) = \frac{1}{2(b-c)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\alpha_k(b-y)}{\alpha_k^3\operatorname{sh}\alpha_k(b-c)}\{2n_k - \alpha_k[(b-c)\operatorname{cth}\alpha_k(b-c) -$$

$$-(b-y)\operatorname{cth}\alpha_k(b-y)](m_k - n_k)\}\sin\alpha_k(x-c) +$$

$$+\frac{1}{2(b-c)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_k(y-c)}{\alpha_k^3\operatorname{sh}\alpha_k(b-c)}\Big\{\operatorname{sh}\alpha_k(b-x)\Big[2n_k +$$

$$+\alpha_k((b-x)\operatorname{cth}\alpha_k(b-x) - (b-c)\operatorname{cth}\alpha_k(b-c))(m_k - n_k) +$$

$$+(b-c)\int\limits_0^x p_k(t)\,(1 - \alpha_k(b-x)\operatorname{cth}\alpha_k(b-x) + \alpha_k(b-c)\operatorname{cth}\alpha_k(b-c) -$$

$$-\alpha_k(t-c)\operatorname{cth}\alpha_k(t-c))\operatorname{sh}\alpha_k(t-c)\,\mathrm{dt}\Big] +$$

$$+(b-c)\operatorname{sh}\alpha_k(x-c)\int\limits_x^b p_k(t)\,[1 - \alpha_k(b-t)\operatorname{cth}\alpha_k(b-t) +$$

$$+\alpha_k(b-c)\operatorname{cth}\alpha_k(b-c) - \alpha_k(x-c)\operatorname{cth}\alpha_k(x-c)]\operatorname{sh}\alpha_k(b-t)\,\mathrm{dt}\Big\}. \qquad (25)$$

При этом нормальные напряжения X_x, Y_y и касательное напряжение X_y при $0 \leqslant x \leqslant c$ будут иметь вид:

$$X_x = -\frac{Eh}{2(1-\sigma^2)}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \sigma\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right),$$

$$= -\frac{Eh}{2(1+\sigma)(b-c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\alpha_k(y-c)}{\alpha_k \mathrm{ch}\alpha_k c} \left\{ \mathrm{ch}\alpha_k x \cdot \left[\frac{2m_k - (1+\sigma)n_k}{1-\sigma} + \right.\right.$$

$$+ \alpha_k (x\mathrm{th}\alpha_k x - c\mathrm{th}\alpha_k c)(m_k - n_k) -$$

$$- (b-c) \int_x^c p_k(t) \left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma} + \alpha_k (c-t) \mathrm{cth}\alpha_k (c-t) + \alpha_k x\mathrm{th}\alpha_k x - \right.$$

$$\left.\left. - \alpha_k c\mathrm{th}\alpha_k c \right) \cdot \mathrm{sh}\alpha_k (c-t) dt \right] - (b-c)\mathrm{sh}\alpha_k (c-x) \int_0^x p_k(t) \left[\frac{1+\sigma}{1-\sigma} + \right.$$

$$\left.\left. + \alpha_k (c-x)\mathrm{cth}\alpha_k (c-x) + \alpha_k t\mathrm{th}\alpha_k t - \alpha_k c\mathrm{th}\alpha_k c \right] \mathrm{ch}\alpha_k t dt \right\} +$$

$$+ \frac{Eh}{4(1+\sigma)c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \eta_k \mathrm{sh}\beta_k (b-y)}{\beta_k \mathrm{sh}\beta_k (b-c)} \left[\frac{2\sigma}{1-\sigma} + \beta_k (b-c)\mathrm{cth}\beta_k (b-c) - \right.$$

$$\left. - \beta_k (b-y)\mathrm{cth}\beta_k (b-y) \right] \cos\beta_k x;$$

$$Y_y = -\frac{Eh}{2(1-\sigma^2)} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) =$$

$$= \frac{Eh}{2(1-\sigma)(b-c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\alpha_k (y-c)}{\alpha_k \mathrm{ch}\alpha_k c} \left\{ \mathrm{ch}\alpha_k x \left[\frac{(1+\sigma)n_k - 2\sigma m_k}{1-\sigma} + \right.\right.$$

$$\left. + \alpha_k (x\mathrm{th}\alpha_k x - c\mathrm{th}\alpha_k c)\,\mathrm{sh}\alpha_k (c-t)\,\mathrm{dt} \right] +$$

$$+ (b-c)\mathrm{sh}\alpha_k (c-x) \int_0^x p_k(t) \left[\frac{1+\sigma}{1-\sigma} - \alpha_k (c-x)\mathrm{cth}\,\alpha_k (c-x) - \right.$$

$$\left.\left. - \alpha_k t\mathrm{th}\alpha_k t + \alpha_k c\mathrm{th}\alpha_k c \right] \mathrm{ch}\alpha_k t\mathrm{dt} \right\} +$$

$$+ \frac{Eh}{4(1+\sigma)c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \eta_k \mathrm{sh}\beta_k (b-y)}{\beta_k \mathrm{sh}\beta_k (b-c)} \left[\frac{2}{1-\sigma} - \beta_k (b-c)\mathrm{cth}\beta_k (b-c) + \right.$$

$$\left. + \beta_k (b-y)\mathrm{cth}\beta_k (b-y) \right] \cos\beta_k x; \tag{26}$$

$$Y_x = -\frac{Eh}{2(1+\sigma)(b-c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\alpha_k (y-c)}{\alpha_k \mathrm{ch}\alpha_k c} \left\{ \mathrm{sh}\alpha_k x \left[m_k + \alpha_k (x\mathrm{cth}\alpha_k x - \right.\right.$$

$$- \operatorname{cth}\alpha_k c)(m_k - n_k) - \alpha_k(b - c)\int_x^c p_k(t) x \operatorname{cth}\alpha_k x + (c - t)\operatorname{cth}\alpha_k c\,(c - t) -$$

$$- \operatorname{cth}\alpha_k c]\operatorname{sh}\alpha_k(c - t)\,dt \Big| + \alpha_k(b - c)\operatorname{ch}\alpha_k(c - x)\int_0^x p_k(t)\,[(c -$$

$$- x)\operatorname{th}\alpha_k(c - x) + t\operatorname{th}\alpha_k t - \operatorname{cth}\alpha_k c]\operatorname{ch}\alpha_k t\,dt\Big\} +$$

$$+ \frac{Eh}{4(1+\sigma)c}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\gamma_k\operatorname{ch}\beta_k(b-y)}{\beta_k\operatorname{sh}\beta_k(b-c)}\,[1 - \beta_k(b-c)\operatorname{cth}\beta_k(b-c) +$$

$$+ \beta_k(b-y)\operatorname{th}\beta_k(b-y)\Big]\sin\beta_k x.$$

Как видно из (26), при ограниченной нагрузке $P(x,y)$ коэффициенты рядов, входящих в выражения напряжения, при $0 \leqslant x < c$ убывают со скоростью $\frac{A}{\alpha_k^3} + \frac{1}{\alpha_k^{1,5}}[F\alpha_k(c-x) + B]e^{-\alpha_k(c-x)} + \frac{1}{\beta_k^{1,5}}[F_1\beta_k(y-c) + B_1]e^{-\beta_k(y-c)}$. Задаваясь величинами $P(x, y)$ E, h, σ, а также отношением сторон $\frac{c}{b}$, из (20), (21) и (24) получим значения m_k, n_k и γ_k сверху и снизу, после чего способом, описанным в работе([5]), определим из (23), (25) и (26) величины прогиба $W(x, y)$ и напряжений X_x, Y_y и X_y с избытком и недостатком

В заключение оценим по модулю n-ый остаток $\rho_n(x, y)$ рядов, входящих в выражение (26) для X_x. Предполагая ограниченность $P(x, y)$, будем иметь;

$$|\rho_n(x, y)| < \frac{A^*}{n^2} + \frac{B^*}{\sqrt{n}}e^{-\alpha_n(c-x)} + \frac{c^*}{\sqrt{n}}e^{-\beta_n(y-c)}. \qquad (27)$$

где постоянные A^*, B^* и C^*, так же, как и приведенные выше A, B, F, B_1, F_1, зависят от величины нагрузки $P(x, y)$, а также от E, h, σ и отношения сторон $\frac{c}{b}$.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Քառակուսաձև անցք ունեցող քառակուսաձև սալի ծռման խառը եզրային խնդրի մասին

Հոդվածում դիտարկվում է քառակուսաձև անցք ունեցող քառակուսաձև սալի ծռման խնդիրը, երբ սալն ազատ հենված է արտաքին՝ ու ամրակցված է ներքին կոնտուրի երկայնքով։

Խնդրի լուծումը որոնվում է Ֆուրյեի շարքի ներկայացմամբ։

Սալի ամրակցված մասերում պտտման անկյան զերոյի հավասարվելու պայմանի բավարարումը բերում է հանրահաշվային գծային հավասարումների անվերջ սիստեմների լուծմանը։ Ցույց է տրվում այդ սիստեմների լիովին ռեգուլյարության պայմանը։ Որոշվում է մաժորանտ սիստեմների լուծումների նվազման կարգը։ Գնահատվում է X_x լարման արտահայտության մեջ մտնող շարքի բն մնացորդը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Б. Г. Галеркин.* Собрание сочинений, т. II, изд. АН СССР, 1953. [2] *Р. С. Минасян.* ДАН АрмССР, т. XXII, №. 5 (1956). [3] *Г. А. Гринберг.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, 1948. [4] *Л. В. Канторович* и *В. И. Крылов.* Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, 1950. [5] *Р. С. Минасян.* Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, том XI, № 3 (1958).