ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXX 1960 1

МАТЕМАТИКА

С. А. Маркосян

Существование предельного цикла системы двух нелинейных дифференциальных уравнений

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 17.VI 1959)

В настоящей заметке „геометрическим методом" устанавливаются достаточные условия существования предельного цикла системы вида

$$\frac{dx}{dt} = [f(x) - \varphi(y)]\, P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = [g(x) + \psi(y)]\, Q(x, y). \qquad (1)$$

Рассматривается также один частный случай этой системы.

Вопросы существования предельных циклов системы (1) при $\varphi(y) \equiv y$, $g(x) \equiv x$ рассматривались в работах [1,2].

В заметке предполагается, что начало координат для системы (1)—единственная особая точка на всей плоскости и что правые части рассматриваемых уравнений определены, непрерывны во всей плоскости и удовлетворяют условию Липшица во всякой ограниченной части этой плоскости. Существование предельного цикла доказывается с помощью известной теоремы Бендиксона. Предельный цикл всегда существует в кольцевой области, не содержащей особой точки, через границы которой интегральные кривые только входят или только выходят, при этом внутренняя граница кольца может совпасть с особой точкой.

При сделанных выше предположениях докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть дана система уравнений* (1), *где* $P(x, y) > 0$, $Q(x, y) > 0$ *при* $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Если:

1) *в некоторой окрестности начала координат*

$$xf(x) > 0, \ xg(x) < 0, \ x \neq 0; \ y\varphi(y) > 0, \ y\psi(y) > 0 \ \ y \neq 0;$$

2) *существует отрезок на оси* x $[a, b]$ $a < 0$, $b > 0$, *вне которого* $xf(x) < 0$, $xg(x) < 0$;

3) *существует отрезок на оси* y $[c, d]$ $c < 0$, $d > 0$, *вне которого* $y\varphi(y) > 0$, $y\psi(y) < 0$,

4) $\varphi(y)$ нечетна, $g(x)$ и $\varphi(y)$ монотонные функции;

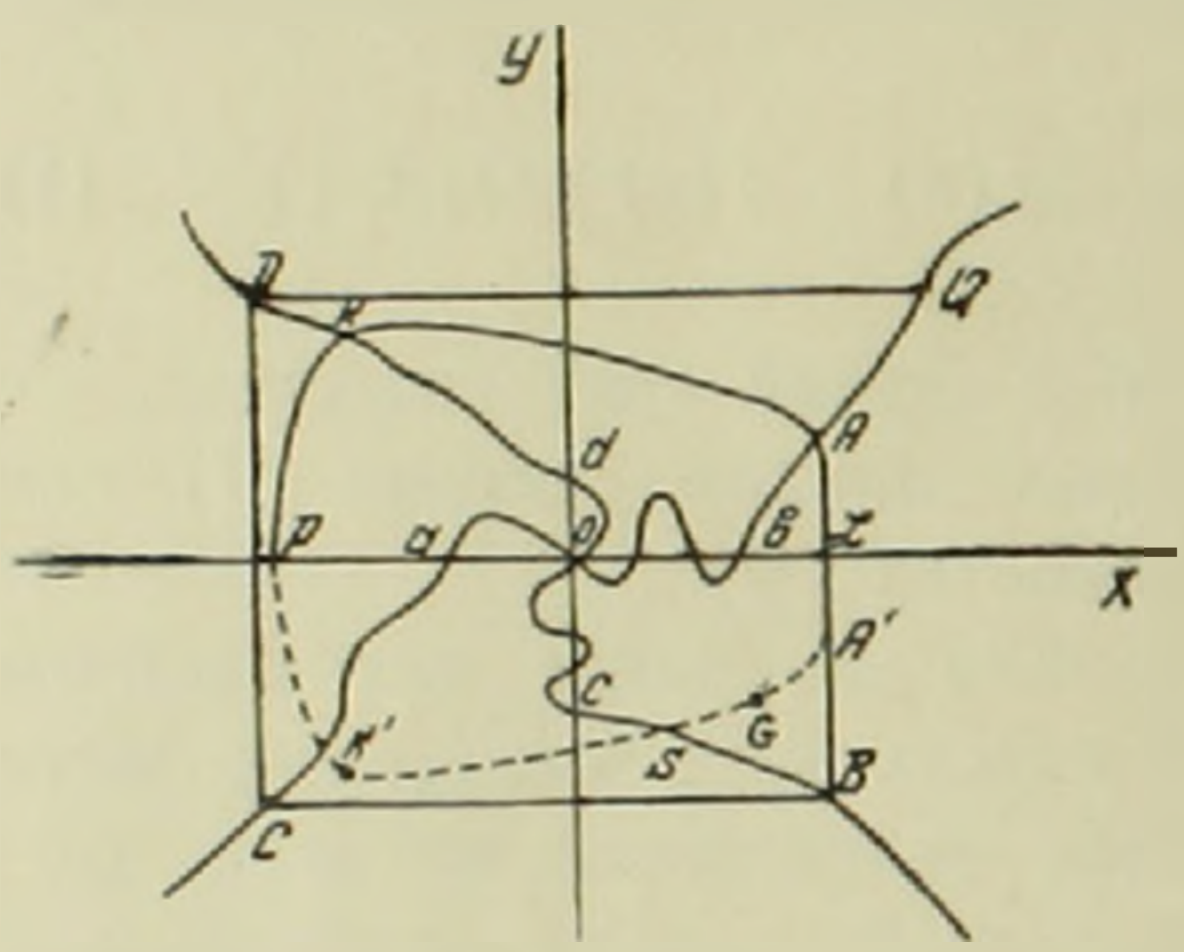
5) $|f(z)|$, $|\varphi(z)|$ $|g(z)|$, $|\psi(z)| \to \infty$ *при* $|z| \to \infty$;

6) *вне отрезка* $a \leqslant x \leqslant b$, $x\dfrac{Q(x,-|y|)}{P(x,-|y|)} \leqslant x\dfrac{Q(x,|y|)}{P(x,|y|)}$ *и на отрезке* $a \leqslant x \leqslant b$ *или в некоторой его части выполняется то же соотношение с обратным знаком,*

то система (1) имеет по крайней мере один устойчивый предельный цикл.

Условие 6 соблюдается, если P и Q—четные функции по отношению y.

Доказательство. Прежде всего выясним расположения кривых $f(x)+\varphi(y)=0$ и $g(x)+\psi(y)=0$. Из уравнения $f(x)+\varphi(y)=0$, в силу монотонности $\varphi(y)$ мы получим, что функция $y=\varphi^{-1}[-f(x)]$, где φ^{-1} функция, обратная функции φ, однозначна. График функции $y=\varphi^{-1}[-f(x)]$ — изоклина бесконечности в той окрестности начала координат, где выполняется условие I, расположена в квадрантах II, IУ, а вне отрезка $[a, b]$ в силу неравенства $xf(x)<0$ — в квадрантах I, III (фиг. 1). Из уравнения $g(x)+\psi(y)=0$, аналогично получим, что изоклина нуля—график функции $x=g^{-1}[-\psi(y)]$, где g^{-1} функция, обратная функции $g(x)$, в той окрестности начала координат, где выполняется условие I, расположена в квадрантах I, III, а вне отрезка $[c, d]$ в квадрантах II, IV (фиг. 1).



Фиг. 1

Для доказательства теоремы достаточно построить кольцевую область, не содержащую особой точки, через границы которой все интегральные кривые входят внутрь при возрастании t.

Построим внешнюю границу этой области.

Обозначим через

$$N=\sup_{c<y<d}|g^{-1}[-\varphi(y)]|,\quad M=\sup_{a<x<b}|\varphi^{-1}[-f(x)]|,\quad y^*=\max\{M, N, |c|, d\}$$

Пусть $\bar{x}$ наименьший корень уравнения $M=\varphi^{-1}[-f(x)]$, обозначим через $l=\max\{b, \bar{x}\}$. При $x^*>l$ выберем точку $A\,(x^*, y^*)$ в I квадранте, на изоклине бесконечности и проведем прямые AB, BC, CD, $y=y_D$ (фиг. 1). В силу условия 5 точки A, B, C, D на изоклинах существуют. Если точка пересечения Q прямой $y=y_D$ с изоклиной бесконечности совпадает с точкой A или по изоклине ближе к точке $O(0,0)$, чем точка A, то искомая замкнутая кривая построена. Если же точка Q дальше от точки $O(0,0)$, чем точка A, то из точки A проведем интегральную кривую системы (1) в сторону убывания t. Рассмотрим тот случай, когда эта интегральная кривая при продолжении достигает отрицательной полуоси x в некоторой точке P, не пересекаясь ни с прямой $y = y_D$, ни с отрезком CD, так как во всех остальных случаях полученная замкнутая кривая, как легко видеть, будет требуемой. Отобразим теперь фигуру $LAKP$ (фиг. 1) относительно оси x. Обозначим точки, симметричные точкам A, K относительно оси x, соответственно через A', K' и докажем, что замкнутая кривая $AKPK'A'$ — искомая. В самом деле, AKP — дуга интегральной кривой системы (1) и в силу единственности решения другие интегральные кривые не имеют с ней общих точек. Вдоль отрезка AA', как легко видеть, $\frac{dx}{dt} < 0$, и потому все интегральные кривые пересекают этот отрезок снаружи внутрь при возрастании t. В любой точке кривой $A'K'P$, сопоставляя тангенс угла касательной к этой кривой, составленного с осью x, с полем направления, т. е. со значением $\frac{dy}{dx}$, легко показать, что все интегральные кривые пересекают кривую $A'K'P$ снаружи внутрь при возрастании t. Так, например, в точке $G(x', -y')$ дуги $A'S$, где S — точка пересечения кривой $A'K'P$ с изоклиной нуля, тангенс угла касательной к этой кривой, составленного с осью x, имеет значения:

$$(\operatorname{tg}\alpha)_G = -\frac{g(x') + \psi(y')}{f(x') + \varphi(y')} \cdot \frac{Q(x', y')}{P(x', y')},$$

а

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_G = \frac{g(x') + \psi(-y')}{f(x') + \varphi(-y')} \cdot \frac{Q(x', -y')}{P(x', -y')}$$

по условиям 2,3 теоремы имеем:

$$g(x') < 0,\ f(x') < 0,\ \psi(y') < 0,\quad \psi(-y') > 0,\quad \varphi(-y') < 0,\ \varphi(y') > 0,$$
$$g(x') + \psi(-y') < 0,\ f(x') + \varphi(y') > 0$$

и потому получим:

$$|g(x') + \psi(-y')| < |g(x') + \psi(y')|$$
$$|f(x') + \varphi(-y')| > f(x') + \varphi(y')$$

(последнее неравенство имеет место в силу нечетности $\varphi(y)$)

В силу условия 3 имеем $\frac{Q(x', -y')}{P(x', -y')} \leq \frac{Q(x', y')}{P(x', y')}$.

Итак, мы получим

$$\frac{g(x') + \psi(-y')}{f(x') + \varphi(-y')} \cdot \frac{Q(x', -y')}{P(x', -y')} < -\frac{g(x') + \psi(y')}{f(x') + \varphi(y')} \cdot \frac{Q(x', y')}{P(x', y')},$$

т. е.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_G < (\operatorname{tg}\alpha)_G$$

в силу чего, как легко убедиться, интегральная кривая через точку G, при возрастании t, входит внутрь области, ограниченной замкнутой кривой $APA'A$. Аналогичным образом, в области выполнения условия 1, можно построить внутреннюю границу кольца, чем завершается доказательство теоремы.

Приведенным методом можно установить и асимптотическую устойчивость в целом тривиального решения системы (1), так, например, верна

Теорема 2. *Пусть дана система* (1).

Если:

1) $xf(x) < 0$, $xg(x) < 0$, $y\varphi(y) > 0$, $y\psi(y) < 0$,

2) $|f(z)|$, $|g(z)|$, $|\varphi(z)|$, $|\psi(z)| \to \infty$, $|z| \to \infty$.

3) $x\,\dfrac{Q(x,-|y|)}{P(x,-|y|)} < x\,\dfrac{Q(x,|y|)}{P(x,|y|)}$,

то тривиальное решение системы (1) *асимптотически устойчиво в целом.*

Рассмотрим один частный случай системы (1):

$$\frac{dx}{dt} = F(x) + \psi(y), \quad \frac{dy}{dt} = \varphi(x). \tag{2}$$

При $\psi(y) = y$, эта система соответствует уравнению нелинейных колебаний. Комбинируя геометрический метод со вторым методом Ляпунова, доказывается следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть дана система уравнений (2).*

Если:

1) *в некоторой окрестности начала координат* $xF(x) > 0$, $x \neq 0$;

2) $\psi(y)$ *монотонна,* $y\psi(y) < 0$,

3) *существуют такие числа* l *и* $\delta_1 > \delta_2$, *что* $F(x) < \delta_2$, *когда* $x > l$, $F(x) > \delta_1$, *когда* $x < -l$;

4) $x\varphi(x) > 0$, $\displaystyle\int_0^{\infty} \varphi(x)\,dx = \infty$, $\displaystyle\int_0^{\infty} \varphi(x)\,dx = \infty$,

то система (2) *имеет по крайней мере один устойчивый предельный цикл.*

Для доказательства теоремы прежде всего покажем, что особая точка $x = y = 0$ системы (2) отталкивающего типа. В самом деле, производная по t от определенно-положительной функции

$$v(x, y) = \int_0^x \varphi(x)\,dx - \int_0^y \psi(y)\,dy$$

в силу системы (2) имеет вид $\frac{dv}{dt} = F(x)\varphi(x)$, но в области выполнения условия 1 функции $F(x)$ и $\varphi(x)$ одинакового знака, поэтому в этой области $\frac{dv}{dt} > 0$, чем доказывается наше утверждение. Далее, геометрическим методом можно построить замкнутую кривую, ограничивающую область, в которую интегральные кривые заданной системы только входят при возрастании t. Тем самым доказывается теорема.

При доказательстве этой теоремы не требуется выполнения условия Липшица.

Из теоремы 3 при $\psi(y) = y$ мы получим теорему А. В. Драгилева[3], однако без требования выполнения условия Липшица.

Ленинаканский педагогический институт
им. М. Налбандяна

Ս. Ա. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ

Երկու ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի սահմանային ցիկլի գոյությունը

Ներկա ակնարկում բերվում են

$$\frac{dx}{dt} = [f(x) + \varphi(y)]\,P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = [g(x) - \psi(y)]\,Q(x, y) \qquad (1)$$

տիպի սիստեմի սահմանային ցիկլի գոյության բավարար պայմաններ: Քննարկվում է նաև այդ սիստեմի մի մասնավոր դեպք: Ակնարկում ենթադրվում է, որ սկզբնակետը (1) սիստեմի համար միակ եզակի կետն է և որ (1) սիստեմի աջ մասերը որոշված են ու անընդհատ ողջ հարթության վրա և բավարարում են Լիպշիցի պայմանին նրա յուրաքանչյուր սահմանափակ մասում: Ապացուցվում են հետևյալ թեորեմները:

Թ ե ո ր ե մ 1. Դիցուք տված է (1) սիստեմը, որտեղ

$$P(x, y) > 0, \; Q(x, y) > 0, \; x \neq 0, \; y \neq 0,$$

երբ

1. սկզբնակետի մի որոշ մերձակայքում

$$xf(x) > 0 \; xg(x) < 0, \; x \neq 0; \; y\varphi(y) > 0, \; y\psi(y) > 0, \; y \neq 0;$$

2) գոյություն ունի x առանցքի այնպիսի $[a, b]$ հատված $a < 0$, $b > 0$, որից դուրս $xf(x) < 0$, $xg(x) < 0$.
3) գոյություն ունի y առանցքի այնպիսի $[c, d]$ հատված $c < 0$, $d > 0$, որից դուրս $y\varphi(y) > 0$, $y\psi(y) > 0$,
4) $\varphi(y)$ կենտ է, $g(x)$ և $\varphi(y)$ ֆունկցիաները մոնոտոն են,
5) $|f(z)|, |\varphi(z)|, |g(z)|, |\psi(z)| \to \infty$, երբ $|z| \to \infty$,
6) $x\frac{Q(x, -|y|)}{P(x, -|y|)} < x\frac{Q(x, |y|)}{P(x, |y|)}$ $[a, b]$ հատվածից դուրս, իսկ այդ հատվածում կամ նրա որևէ մասում, տեղի ունի նույն անհավասարությունը հակառակ նշանով, ապա (1) սիստեմը ունի գոնե մեկ կայուն սահմանային ցիկլ:

Թ ե ո ր ե մ 2. Դիցուք տված է

$$\frac{dx}{dt} = F(x) + \psi(y), \quad \frac{dy}{dt} = \varphi(x) \tag{2}$$

սիստեմը: Եթե

1) սկզբնակետի մի որոշ մերձակայքում $xF(x) > 0$, $x \neq 0$,

2) $\psi(y)$ մոնոտոն է և $y\psi(y) < 0$,

3) գոյություն ունեն այնպիսի l և $\delta_1 > \delta_2$ թվեր, որ $F(x) < \delta_2$, երբ $x > l$, $F(x) > \delta_1$, երբ $x < -l$,

$$4. \; x\varphi(x) > 0, \quad \int_0^{\infty} \varphi(x)\, dx, = \infty \quad \int_0^{\infty} \varphi(x)\, dx = \infty,$$

ապա (2) սիստեմն ունի գոնե մեկ կայուն սահմանային ցիկլ:

Վերջին թեորեմից, երբ $\psi(y) = y$ ստացվում է Ա. Վ. Դրագիլևի թեորեմը([3]), սակայն առանց Լիպշիցի պայմանի պահանջի:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. А. Маркосян*, ДАН АрмССР, т. XXIII, № 4, 153—159, (1956). [2] *С. А. Маркосян*, Известия высших учебных заведений, Математика, вып. 2, 114—121 (1959). [3] *В. В. Немыцкий* и *В. В. Степанов*, Качественная теория дифференциальных уравнений. М.—Л., Гостехиздат, 153—161, 1949.