ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXX 1960 1

МАТЕМАТИКА

Р. М. Мартиросян

О некоторых возмущениях оператора Лапласа в многомерном пространстве

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 13. VI 1959)

Изучению оператора Штурма-Лиувилля посвящено много исследований, однако в многомерном пространстве соответствующий оператор $-\Delta u+cu$ изучен с значительно меньшей полнотой даже в самосопряженном случае. Только в последние годы появилось несколько работ (И. М. Гельфанд [1], М. В. Келдыш [2]), посвященных изучению этого оператора в случае, когда $c(Q)$ — комплекснозначная функция. Укажем также работу М. А. Наймарка [3], в которой, однако, рассмотрен одномерный оператор, точнее, оператор $-y''+cy$ на полупрямой при различных предположениях относительно комплексной функции $c(x)$. Далее, исследованию спектра оператора $-\Delta u+cu$ была посвящена диссертация автора. Предлагаемая заметка содержит ряд неопубликованных результатов этой диссертации, существенно дополненный новыми фактами, вполне согласующимися с известными положениями квантовой механики.

Переходя к изложению, обозначим через Ω_n область определения гипермаксимального оператора $-\Delta u$, рассматриваемого в гильбертовом пространстве $L_2(E_n)$ функций, определенных на всем n-мерном эвклидовом пространстве E_n и суммируемых с квадратом. Как известно, этот оператор является замыканием в $L_2(E_n)$ оператора $-\Delta u$, рассматриваемого на совокупности всех финитных и неограниченно дифференцируемых функций. Нетрудно также показать, что Ω_n фактически совпадает с совокупностью всех функций из $L_2(E_n)$, имеющих суммируемый с квадратом обобщенный лапласиан в смысле С. Л. Соболева [4].

Предполагая теперь комплекснозначную функцию $c(Q)$ ограниченной и суммируемой с квадратом, введем в рассмотрение оператор

$$Tu=-\Delta u+cu \qquad (u\in\Omega_n), \tag{1}$$

область определения которого совпадает с Ω_n.

Характер спектра этого оператора тесно связан с поведением резольвенты B_λ оператора $-\Delta u$. Поэтому прежде всего дается интегральное представление оператора B_λ. Оказывается, что для всех $f(Q) \in L_2(E_n)$ и для всех λ, не принадлежащих положительной полуоси

$$B_\lambda f(M) = \int\limits_{E_n} \Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ}) f(Q)\, dQ \qquad (\lambda \neq 0, \arg\lambda \neq 0, Jm\sqrt{\lambda} > 0), \tag{2}$$

где r_{MQ} обозначает расстояние между точками M и Q, $\sqrt{\lambda}$ выбирается из верхней полуплоскости, а функция $\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r)$ выражается через функцию Ханкеля $H_\nu^{(1)}(z)$ первого рода порядка ν следующей формулой

$$\Phi_{n,\lambda}(r) = \frac{i}{4}\left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^{\frac{n-2}{2}} H^{(1)}_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r) \qquad (r > 0,\ n = 1, 2, \cdots) \tag{3}$$

Для получения представления (2) предварительно доказываем, пользуясь асимптотикой функций Ханкеля и известными рекуррентными соотношениями, что $\Phi_{n,\lambda}(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi''_{n,\lambda}(r) + \frac{n-1}{r}\Phi'_{n,\lambda}(r) + \lambda^2\Phi_{n,\lambda}(r) = 0 \tag{4}$$

и условиям

$$\lim_{r\to 0} \omega_n(r)\Phi_{n,\lambda}(r) = 0, \qquad \lim_{r\to 0} \omega_n(r)\Phi'_{n,\lambda}(r) = -1, \tag{5}$$

где через $\omega_n(r)$ обозначена площадь поверхности сферы радиуса r в пространстве E_n. После этого, с помощью формулы Грина без труда устанавливаем, что для любой финитной и неограниченно дифференцируемой функции $u(Q)$ справедливо тождество

$$u(M) \equiv -\int\limits_{E_n} \Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})\{\Delta u(Q) + \lambda u(Q)\}\, dQ.$$

Таким образом (2) будет доказано, если мы установим ограниченность оператора, стоящего в правой части (2), и плотность в $L_2(E_n)$ многообразия функций вида $-\Delta u - \lambda u$, где $u(Q)$ пробегает совокупность всех финитных и неограниченно дифференцируемых функций. Но плотность в $L_2(E_n)$ этого многообразия устанавливается без труда, а ограниченность указанного оператора следует из оценки

$$\left|\int\limits_{E_n} \Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ}) f(Q)\, dQ\right|^2 \leq \int\limits_{E_n} |\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})|\, dQ \int\limits_{E_n} |\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})| \times$$

$$\times |f(Q)|^2 dQ.$$

если заметить, что первый из интегралов правой части существует в силу известной асимптотики ханкелевых функций и не зависит от выбора точки M. Интегрируя это неравенство по переменной M и пользуясь теоремой Фубини, немедленно убеждаемся в ограниченности интересующего нас оператора. При этом интересно отметить, что ядро $\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})$ оператора B_λ не типа Карлемана при $n>3$ из-за высокой особенности при $M=Q$.

Во всей работе существенную роль играет следующая лемма

Лемма 1. Для всех целых q, $1 < q < \left[\frac{n}{2}\right]$, справедливо равенство

$$\underbrace{\int_{E_n}\cdots\int_{E_n}}_{q\ \text{раз}} \Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ_1})\cdots\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{Q_{q-1}Q_q})\,\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{Q_qQ})\,dQ_1\cdots dQ_q =$$

$$= \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{4\pi}\right)^q \Phi_{n-2q,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ}), \qquad (6)$$

где $\sqrt{\lambda}$ выбирается из верхней полуплоскости, а $\Phi_{n,\lambda}(r)$ определена формулой (3).

Идея доказательства состоит в следующем. Можно показать, что левая часть (6) представляет собой ядро оператора B_λ^{q+1}. С другой стороны, как известно [5]

$$B_\lambda^{q+1} = \frac{1}{q!}\frac{d^q}{d\lambda^q}B_\lambda,$$

где дифференцирование в правой части следует понимать в смысле равномерной сходимости операторов. Таким образом, достаточно показать, что ядро оператора $\frac{d^q}{d\lambda^q}B_\lambda$ получается формальным дифференцированием q раз ядра B_λ и что результат выражается формулой, стоящей в правой части (6). Подробное доказательство в частном случае $n=3$ приведено в нашей работе [6].

Предполагая теперь $c(Q)$ ограниченной, введем в рассмотрение при $q=\left[\frac{n}{2}\right]$ вспомогательную функцию (при $Jm\lambda>0$)

$$K_{n,\lambda}(M,Q) = \underbrace{\int_{E_n}\cdots\int_{E_n}}_{q\ \text{раз}}\Phi_{n,\lambda}(r_{MQ_1})\cdots\Phi_{n,\lambda}(r_{Q_qQ})c(Q_1)\cdots c(Q_q)\,dQ_1\cdots dQ_q, \quad (7)$$

нужные нам свойства которой приводятся в следующей лемме.

Лемма 2. Если функция $c(Q)$ ограничена, то при фиксированном значении одной из переменных $K_{n,\lambda}(M,Q)$ является непрерывной функцией другой переменной. Кроме того, $K_{n,\lambda}(M,Q)$ ограничена и непрерывна в среднем, т. е.

$$\lim_{P\to M}\int_{E_n}|K_{n,\lambda}(M,Q)-K_{n,\lambda}(P,Q)|^2\,dQ = 0.$$

Если предположить еще, что $c(Q)$ суммируема с квадратом, то

$$\int_{E_n}\int_{E_n}|K_{n,\lambda}(M,Q)\,c(Q)|^2\,dM\,dQ < \infty.$$

Доказательство существенно опирается на лемму 1.

Эти леммы позволяют сделать ряд заключений о собственных функциях и о спектре оператора $Tu = -\Delta u + cu$ в многомерном пространстве.

Прежде всего, из (2) вытекает, что если

$$-\Delta u - cu = \lambda^2 u \qquad (u \in \Omega_n), \tag{8}$$

то

$$u\,(M) = \int_{E_n}\Phi_{n,\lambda}(r_{MQ})\;c\,(Q)\,u\,(Q)\,dQ, \qquad (Jm\,\lambda > 0) \tag{9}$$

Итерируя это уравнение $q = \left|\frac{n}{2}\right|$ раз, получим, как легко видеть,

$$u\,(M) = \int_{E_n}K_{n,\lambda}\,(M,Q)\,c\,(Q)\,u(Q)\,dQ, \qquad (Jm\lambda > 0) \tag{10}$$

где $K_{n,\lambda}\,(M,Q)$ определена формулой (7). Воспользовавшись леммой 2, нетрудно прийти к следующему утверждению.

Теорема 1. *Пусть $c\,(Q)$ суммируема с квадратом и ограничена. Тогда каждая собственная функция оператора T, определенного формулой* (1), *непрерывна, ограничена и суммируема.*

Далее имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $c\,(Q)$ суммируема с квадратом и ограничена. Тогда, если $u\,(Q)$ — какая-нибудь собственная функция оператора T, то $\Delta u\,(Q)$ суммируема и*

$$\int_{E_n}\Delta\,u\,(Q)\,dQ = 0.$$

Суммируемость $\Delta\,u\,(Q)$ является следствием теоремы 1 и поэтому из (8) следует, что достаточно обнаружить справедливость равенства

$$\int_{E_n}c\,(Q)\,u\,(Q)\,dQ = -\lambda^2\int_{E_n}u\,(Q)\,dQ.$$

Но на основании теоремы Фубини из (9) находим

$$\int\limits_{E_n} u(M)\,dM = \int\limits_{E_n} \Phi_{n,\lambda}(r_{MQ})\,dM \int\limits_{E_n} c(Q)\,u(Q)\,dQ$$

С другой стороны, из (4) и (5) следует, что

$$\lambda^2 \int\limits_0^\infty \Phi_{n,\lambda}(r)\,\omega_n(r)\,dr = -\int\limits_0^\infty \Phi''_{n,\lambda}(r)\,\omega_n(r)\,dr - (n-1)\int\limits_0^\infty \Phi'_{n,\lambda}(r)\,\frac{\omega_n(r)}{r}\,dr$$

Учитывая равенство $\frac{n-1}{r}\,\omega_n(r) = \omega'_n(r)$, находим отсюда

$$\lambda^2 \int\limits_0^\infty \Phi_{n,\lambda}(r)\,\omega_n(r)\,dr = -\int\limits_0^\infty \Phi''_{n,\lambda}(r)\,\omega_n(r)\,dr -$$

$$-\int\limits_0^\infty \Phi'_{n,\lambda}(r)\,\omega'_n(r)\,dr.$$

Теперь уже нетрудно заключить, что

$$\lambda^2 \int\limits_{E_n} \Phi_{n,\lambda}(r_{MQ})\,dM = -1,$$

а это и доказывает теорему.

Далее, имеет место следующая

Теорема 3. Пусть $c(Q)$ ограничена и суммируема с квадратом. Тогда оператор T не имеет остаточного спектра, а непрерывный спектр его совпадает с положительной полуосью. Собственные значения этого оператора, лежащие вне положительной полуоси, не могут иметь точек накопления вне этой полуоси.

Это утверждение также можно получить, пользуясь леммой 2. Именно, из этой леммы можно заключить, что вполне непрерывна некоторая итерация оператора $B_\lambda c$, состоящего в том, что функции из $L_2(E_n)$ сперва умножаются на $c(Q)$, а затем к результату применяется оператор B_λ. С другой стороны, известно, что если некоторая итерация оператора A вполне непрерывна, то для уравнения $(E+A)u=f$ справедливы теоремы Фредгольма ([7]). Это замечание позволяет доказать теорему путем, намеченным в заметке ([1]). Другое доказательство этой теоремы приведено в нашей работе ([8]).

Теперь мы укажем достаточные условия, при которых собственные значения оператора $-\Delta u + cu$ не имеют предельных точек на конечном расстоянии.

Теорема 4. Пусть при некотором $\varepsilon > 0$ функция $c(Q)e^{\varepsilon r_Q}$, где r_Q означает расстояние от точки Q до начала координат, ограничена и суммируема. Тогда собственные значения оператора T, определенного формулой (1), не имеют предельных точек на ко-

нечном расстоянии, если n нечетно и, быть может, имеют единственную предельную точку 0 в случае, когда n четно.

Идея доказательства состоит в следующем. Как мы уже видели, собственная функция, соответствущая собственному значению λ^2, удовлетворяет уравнению (10). Вводя параметр μ и рассматривая вспомогательное уравнение

$$u(M) = \mu \int\limits_{E_n} K_{n,\lambda}(M, Q)\, c(Q)\, u(Q) dQ,$$

замечаем, что при каждом фиксированном значении λ из верхней полуплоскости это есть однородное интегральное уравнение типа Фредгольма, обращающееся при $\mu = 1$ в исходное уравнение (10). Нетрудно показать, что к этому уравнению применим аппарат теории Фредгольма. Поэтому, если положить

$$d_k(\lambda) = \underbrace{\int\limits_{E_n} \cdots \int\limits_{E_n}}_{k \text{ раз}} \det \| K_{n,\lambda}(Q_i, Q_j) c(Q_j) \| dQ_1 \cdots dQ_k,$$

то можно утверждать, что собственные значения оператора T совпадают с нулями функции

$$D(\lambda, 1) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{d_k(\lambda)}{k!},$$

лежащими в верхней полуплоскости. Для доказательства теоремы $D(\lambda, 1)$ рассматриваем в несколько большей области, а именно в полуплоскости $Jm\lambda > -\frac{\varepsilon}{4}$, где ε то же самое, что и в формулировке теоремы, и показываем, что $D(\lambda, 1)$ голоморфна в этой области при n нечетном и может иметь особенность в нуле при n четном. При этом существенно используется получаемая из леммы 1 оценка

$$|K_{n,\lambda}(M, Q)| \leqslant L_n(\lambda)\, A^q \frac{1}{q!} \left(\frac{1}{4\pi}\right)^q \Phi_{n-2q,\, i\frac{\varepsilon}{4}}(r_{MQ})\, e^{\frac{\varepsilon}{2}(r_M + r_Q)},$$

где через A обозначена верхняя грань функции $c(Q) e^{\varepsilon r_Q}$, $q = \left[\frac{n}{2}\right]$, а $L_n(\lambda)$ определена следующим образом

$$L_n(\lambda) = \begin{cases} \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{n-2}{2} q} & \text{если } |\lambda| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \\ \left(\frac{4|\lambda|}{\varepsilon}\right)^{\frac{n-2}{2} q}, & \text{если } |\lambda| > \frac{\varepsilon}{4},\ Jm\lambda > -\frac{\varepsilon}{4}. \end{cases}$$

Переходя к следующей теореме, введем постоянную L, которая в неявном виде определяется с помощью следующего соотношения:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\frac{k}{2}} L^k}{k!} = 1. \tag{11}$$

Далее, считая $q = \left[\frac{n}{2}\right]$, введем обозначения

$$\psi_n(R) = \max\left\{1, R^{\frac{n-2}{4}q}\right\} \tag{12}$$

$$\gamma = \sup_{0<r<\infty}\{-rH_1(ir)\}. \tag{13}$$

Используя некоторые оценки, полученные при доказательстве предыдущей теоремы, можно указать условия, при которых внутрь заданной ограниченной области комплексной плоскости не попадают собственные значения оператора T. Именно, имеет место

Теорема 5. Пусть при некотором $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства

$$|c(Q)|e^{\varepsilon r_Q} \leqslant A, \qquad \int_{E_n} |c(Q)| e^{\varepsilon r_Q} dQ = M < \infty.$$

Тогда, если при четном n выполняется условие

$$A^q M < \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}q} \frac{L \cdot q!\,(4\pi)^q \varepsilon^2}{8\pi\gamma \cdot \psi_n(R)},$$

а при нечетном n выполняется условие

$$A^q M < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}q} \frac{L \cdot q!\,(4\pi)^q \varepsilon}{2\psi_n(R)},$$

где $\psi_n(R)$ и γ определены соответственно формулами (12) *и* (13), *а L определяется из* (11), *то внутри круга радиуса R с центром в начале координат нет собственных значений оператора T.*

Отметим следующее очевидное следствие этой теоремы.

Пусть при некотором $\varepsilon > 0$ функция $c(Q)e^{\varepsilon r_Q}$ ограничена и суммируема. Пусть кроме того известно, что для всякой функции $\mu c(Q)$, где μ постоянная, $|\mu| \leqslant 1$, спектр оператора $-\Delta u + \mu c u$ лежит внутри некоторой фиксированной ограниченной области. Тогда можно указать такое $\alpha > 0$, что для всех μ, $|\mu| \leqslant \alpha$, оператор $-\Delta u + \mu c u$ не имеет дискретного спектра.

В случае трехмерного пространства оказывается, что если $c(Q)$ достаточно мала в известном смысле, то дискретный спектр оператора

T отсутствует. Этот результат получен в нашей работе ([illegible]) и находится в полном соответствии с известным фактом квантовой механики, состоящим в том, что частица может „проскочить“ через небольшие барьеры. Приводимая ниже теорема существенно дополняет этот результат, ибо не только получен значительно более удобный признак отсутствия спектра, но и показано, что в этом случае нет положительных собственных значений. Как известно, последний вопрос в общей постановке очень сложен, но в рассматриваемом случае нам удалось найти чрезвычайно простое доказательство.

Теорема 6. *Пусть $n=3$ и при некотором $\varepsilon>0$ комплексно-значная функция $c(Q)$ удовлетворяет одному из следующих двух условий:*

$$A)\quad \sup|c(Q)e^{\varepsilon r_Q}| < \frac{\varepsilon^2}{4}, \qquad B)\quad \int_{E_3} |c(Q)|^2 e^{\varepsilon r_Q}\, dQ < 2\pi\varepsilon.$$

Тогда весь спектр оператора $Tu = -\Delta u + cu$ совпадает с положительной полуосью, причем собственных значений у этого оператора нет.

Прежде всего устанавливается, что если при некотором положительном $\lambda=\lambda_0$ уравнение $-\Delta u - \lambda_0 u = c(Q) f(Q)$ имеет решение, причем $f(Q)$ суммируемо с квадратом, а $c(Q)$ удовлетворяет одному из условий (A) или (B), то

$$u(M) = \int_{E_3} \frac{e^{i\sqrt{\lambda_0}\, r_{MQ}}}{4\pi r_{MQ}}\, c(Q) f(Q)\, dQ.$$

Доказательство этого опирается на то, что если $\lambda_n \to \lambda_0$, то решения u_n уравнения $-\Delta u_n - \lambda_n u_n = cf$ в каждой ограниченной области равномерно сходятся к $u(Q)$. После этого вопрос сводится к оценке нормы интегрального оператора $A\varphi$, ядро которого $K(M, Q)$ определяется формулой

$$K(M, Q) = -\frac{e^{-\frac{\varepsilon}{4} r_M}\, c(Q) e^{\frac{\varepsilon}{4} r_Q}\, e^{i\sqrt{\lambda}\, r_{MQ}}}{4\pi r_{MQ}}.$$

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Հ. Ս. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Լապլասի օպերատորի որոշ գրգռումների սպեկտրի մասին բազմաչափ և եռաչափ տարածություններում

Դիցուք Ω_n նշանակում է ամբողջ E_n էվկլիդյան n — չափանի տարածության մեջ սահմանված և քառակուսով ինտեգրելի ֆունկցիաների $L_2(E_n)$ հիլբերտյան տարածության մեջ դիտարկված $-\Delta u$ հիպերմաքսիմալ օպերատորի որոշման տիրույթը: Ω_n — ի վրա դիտարկենք $Tu = -\Delta u + cu$ օպերատորը, ենթադրելով $c(Q)$ կոմպլեքս ֆունկցիան սահմանափակ և քառակուսով ինտեգրելի: Տեղի ունեն հետևյալ թեորեմները:

Թեորեմ 1. T օպերատորի յուրաքանչյուր սեփական ֆունկցիան անընդհատ է սահմանափակ և հանրագումարելի:

Թեորեմ 2. Եթե $u(Q)$-ն T օպերատորի սեփական ֆունկցիան է, ապա $\Delta u(Q)$-ն հանրագումարելի է և

$$\int\limits_{E_n} \Delta u(Q)\, dQ = O.$$

Թեորեմ 3. T օպերատորը չունի մնացորդային սպեկտր, իսկ նրա անընդհատ սպեկտրը համընկնում է դրական կիսաառանցքի հետ: Իրական կիսաառանցքից դուրս գտնվող սեփական արժեքները չեն կարող ունենալ կուտակման կետեր այդ կիսաառանցքից դուրս:

Թեորեմ 4. Դիցուք մի որևէ ε դրական թվի համար $c(Q)e^{\varepsilon r_Q}$ ֆունկցիան, որտեղ r_Q նշանակում է Q կետի հեռավորությունը մինչև կոորդինատների սկզբնակետը, սահմանափակ է և հանրագումարելի: Այդ դեպքում T օպերատորի սեփական արժեքները չունեն սահմանային կետեր վերջավոր հեռավորության վրա, երբ n-ը կենտ է և նրանց միակ սահմանային կետը կարող է լինել 0 կետը, երբ n-ը զույգ է:

Թեորեմ 5. Դիցուք մի որևէ ε դրական թվի համար տեղի ունենեն հետևյալ անհավասարությունները՝

$$\left| c(Q)e^{\varepsilon r_Q} \right| < A, \qquad \int\limits_{E_n} \left| c(Q)e^{\varepsilon r_Q} \right| dQ = M < \infty,$$

իսկ $\psi_n(R)$, γ և L-ը սահմանվում են հետևյալ կերպ՝

$$\psi_n(R) = \max\left\{1, R^{\frac{n-2}{4}q}\right\}, \quad \gamma = \sup_{0<r<\infty} \{-rH_1(ir)\}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{\frac{k}{2}} L^k}{k!} = 1,$$

որտեղ $q = \left[\frac{n}{2}\right]$: Այդ դեպքում, երբ զույգ և կենտ n-ի համար համապատասխանաբար տեղի ունենեն

$$A^q M < \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}q} \frac{L\cdot q!\,(4\pi)^q\varepsilon^2}{8\pi\gamma\psi_n(R)}, \qquad A^q M < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}q} \frac{L\cdot q!\,(4\pi)^q\varepsilon}{2\psi_n(R)}$$

պայմանները, ապա O կենտրոնով և R շառավիղով շրջանի ներսում T օպերատորը չունի սեփական արժեքներ:

Թեորեմ 6. Դիցուք $n = 3$ և մի որևէ ε դրական թվի համար բավարարվում է

$$A)\ \sup \left| c(Q)e^{\varepsilon r_Q} \right| < \frac{\varepsilon^2}{4}, \qquad B)\ \int\limits_{E_3} |c(Q)|^2 e^{\varepsilon r_Q} dQ < 2\pi\varepsilon$$

պայմաններից մեկն ու մեկը: Այդ դեպքում T օպերատորը չունի սեփական արժեքներ և նրա սպեկտրը համընկնում է դրական կիսաառանցքի հետ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. М. Гельфанд*, УМН, т. УII, вып. 6 (1952). [2] *М. В. Келдыш*, ДАН СССР новая серия, т. 77, № 1 (1951). [3] *М. А. Наймарк*, ДАН СССР, новая серия, т. 85 № 1 (1952). [4] *С. Л. Соболев*. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. [5] *А. И. Плеснер*, ч. 1, УМН, вып. IX (1941). [6] *Р. М. Мартиросян*, Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. X, № 1 (1957). [7] *С. М. Никольский*, ДАН СССР, новая серия, т. II (XI), № 8 (1936). [8] *Р. М. Мартиросян*, ДАН АрмССР, т. XXIX.