

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. Л. Абрамян и А. А. Баблоян

Кручение круглых стержней, имеющих продольные выточки или зубцы и центрально расположенную полость

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 2.VI 1959)

Рассматривается задача о кручении круглых призматических стержней, имеющих симметрично расположенные продольные выточки или зубцы в форме кольцевого сектора и центрально расположенную круглую полость, а также круглых стержней, имеющих центрально расположенную круглую полость с симметричными продольными пазами.

Точное решение этой задачи получено методом введения вспомогательных функций, изложенного в работах (1-3).

Определение постоянных интегрирования сведено к решению бесконечных систем линейных уравнений. Доказано, что полученные системы вполне регулярны и имеют ограниченные сверху и стремящиеся к нулю (при  $k \rightarrow \infty$ ) свободные члены.

Для двух частных случаев, когда стержень имеет а) круглую полость и шесть наружных продольных выточек, б) круглую полость и одну наружную продольную выточку, вычислены жесткости и напряжения.

А для другого случая, когда круглый стержень имеет центрально расположенную полость с шестью продольными пазами, вычислена жесткость.

Полученные результаты приведены в табл. 1, 2 и 3.

Для задачи о кручении подобных, но сплошных стержней приближенные решения были получены в работах Стенеску и Думитреску (4) и Маня (5).

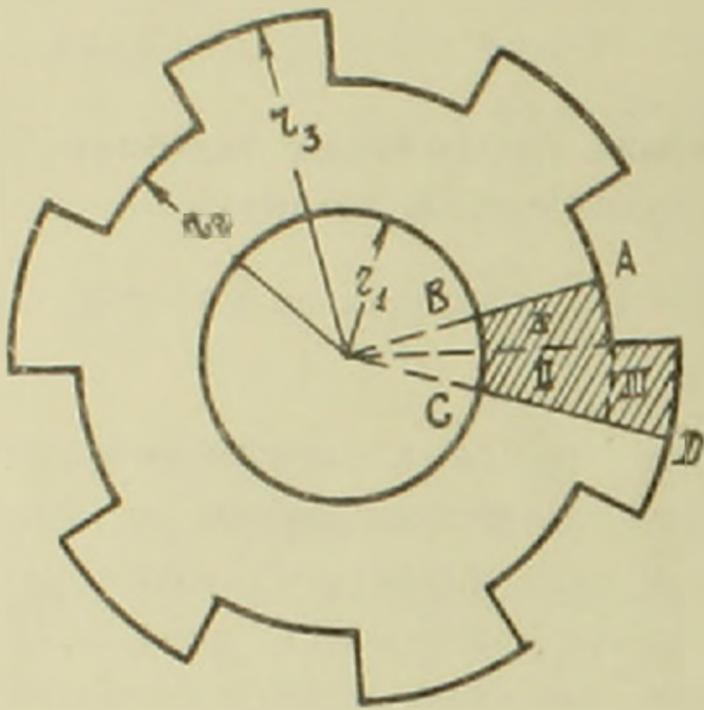
Рассмотрим задачу кручения круглого призматического стержня, имеющего симметрично расположенные наружные продольные зубцы (или выточки) и центрально расположенную круглую полость (фиг. 1). Функция напряжения при кручении призматических стержней в полярных координатах удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -2 \quad (1)$$

в области сечения стержня.

Полагаем, что эта функция на внешнем контуре сечения обращается в нуль, а на внутреннем контуре сечения принимает постоянное значение  $U_0$ .

В силу симметрии области сечения функцию  $U(r, \varphi)$  отыскиваем только в  $\frac{1}{2n}$ -ой части области сечения, где  $n$  — число выточек.



Фиг. 1.

Переходя к переменной

$$t = \ln \frac{r}{r_2} \quad (2)$$

и представляя функцию  $U(r, \varphi)$  в виде

$$U(r, \varphi) = U^*(t, \varphi) = \Phi(t, \varphi) - \frac{r_2^2 e^{2t}}{2} \quad (3)$$

для определения функции  $\Phi(t, \varphi)$ , получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (4)$$

Разбивая  $\frac{1}{2n}$ -ую часть области

на простейшие области I, II и III, полагаем, что функция  $\Phi(t, \varphi)$  в этих областях принимает соответственно значения  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$ . Вспомогательные функции  $\Phi_i(t, \varphi)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) должны удовлетворять следующим граничным условиям и условиям сопряжения

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(0, \varphi) - \frac{r_2^2}{2} = \Phi_1(-t_1, \varphi) - \Phi_0 = \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \right)_{\varphi = \varphi_1} = 0 \\ \Phi_2(-t_1, \varphi) - \Phi_0 = \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \right)_{\varphi = -\varphi_2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_3(t_2, \varphi) - \frac{r_3^2}{2} = \Phi_3(t, 0) - \frac{r_2^2 e^{2t}}{2} = \left( \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} \right)_{\varphi = -\varphi_3} = 0 \\ \Phi_1(t, 0) = \Phi_2(t, 0), \quad \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \right)_{\varphi = 0} = \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \right)_{\varphi = 0} \\ \Phi_2(0, \varphi) = \Phi_3(0, \varphi), \quad \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right)_{t=0} = \left( \frac{\partial \Phi_3}{\partial t} \right)_{t=0} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} t_1 = \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad t_2 = \ln \frac{r_3}{r_2} \\ \varphi_1 = \frac{\pi}{2n}, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}, \quad \Phi_0 = U_0 + \frac{r_1^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

и  $\alpha$  — число, характеризующее ширину выемки или зубца.

Решая уравнение (4) методом разделения переменных и удовлетворяя условиям (5) и (6), для функций  $\Phi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) получим следующие значения:

$$\begin{aligned} \Phi_1(t, \varphi) = & \frac{r_2^2}{2} \left( 1 + \frac{t}{t_1} \right) - \Phi_0 \frac{t}{t_1} + \\ & + \frac{1}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{ch} \beta_k (\varphi_1 - \varphi)}{\beta_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi_1} \sin \beta_k t \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_1, -t_1 \leq t \leq 0) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(t, \varphi) = & \frac{r_2^2}{2} \left( 1 + \frac{t}{t_1} \right) - \Phi_0 \frac{t}{t_1} + \\ & + \frac{1}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{ch} \beta_k (\varphi_2 + \varphi)}{\beta_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi_2} \sin \beta_k t + \end{aligned} \quad (9)$$

$$+ \frac{m}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k \operatorname{sh} \lambda_k (t_1 + t)}{\lambda_k \operatorname{sh} \lambda_k t_1} \sin \lambda_k \varphi \quad (-\varphi_2 \leq \varphi \leq 0, -t_1 \leq t \leq 0)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(t, \varphi) = & \frac{r_2^2}{2} \left( 1 - \frac{t}{t_2} \right) + \frac{r_3^2 t}{2t_2} + \\ & + \frac{m}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k \operatorname{sh} \lambda_k (t_2 - t)}{\lambda_k \operatorname{sh} \lambda_k t_2} \sin \lambda_k \varphi - \end{aligned} \quad (10)$$

$$- \frac{4r_2^2}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{k+1} e^{2t_2}}{\gamma_k (\gamma_k^2 + 4)} \cdot \frac{\operatorname{ch} \gamma_k (\varphi_2 + \varphi)}{\operatorname{ch} \gamma_k \varphi_2} \sin \gamma_k t, \quad (-\varphi_2 \leq \varphi \leq 0, 0 \leq t \leq t_2)$$

где

$$\beta_k = \frac{k\pi}{t_1}, \quad \lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2\varphi_2}, \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{t_2}, \quad (11)$$

и неизвестные постоянные  $X_k$  и  $Y_k m$  определяются из бесконечной системы линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} X_k &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} Y_p \\ Y_k &= \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} X_p + Q_k \end{aligned} \right\} (k = 1, 2, \dots, \infty) \quad (12)$$

В (12) введены следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} a_{kp} &= \frac{2\beta_k m}{\varphi_2 (\operatorname{th}\beta_k \varphi_1 + \operatorname{th}\beta_k \varphi_2) (\lambda_p^2 + \beta_k^2)} \\ b_{kp} &= \frac{2\lambda_k}{m t_1 (\operatorname{cth}\lambda_k t_1 + \operatorname{cth}\lambda_k t_2) (\beta_p^2 + \lambda_k^2)} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$Q_k = - \frac{2\lambda_k r_2^2}{(\lambda_k^2 - 4)(\operatorname{cth}\lambda_k t_1 + \operatorname{cth}\lambda_k t_2)} \left[ 1 + \frac{\lambda_k^2 - 4}{2\lambda_k^2 t_1} \left( \frac{2\Phi_0}{r_2^2} - 1 \right) + \frac{2}{\lambda_k} \left( \operatorname{cth}\lambda_k t_2 - \frac{e^{2t_2}}{\operatorname{sh}\lambda_k t_2} \right) \right] \quad (14)$$

Системы (12) вполне регулярны, ибо для суммы модулей коэффициентов этих систем имеют место следующие неравенства

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| \leq m, \quad \sum_{p=1}^{\infty} |b_{kp}| < \frac{1}{2m} \quad (15)$$

Выбираем постоянное число  $m$  равным

$$m = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (16)$$

Постоянное значение  $\Phi_0$  определяется при помощи теоремы Бредта о циркуляции касательного напряжения при кручении

$$\int_{\Gamma_0} \tau_s ds = 2G\tau\Omega_0 \quad (17)$$

где  $\Gamma_0$  — внутренний контур сечения,  $\Omega_0 = \pi r_1^2$  — площадь, ограниченная контуром  $\Gamma_0$ .

Подставляя значения

$$\tau_s = \tau_{z\varphi} \Big|_{t=-t_1} = - \frac{G\tau e^{-t}}{r_2} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} - r_2^2 e^{2t} \right) \Big|_{t=-t_1}, \quad ds = r_2 e^{-t} d\varphi \quad (18)$$

в (17), это равенство приведем к виду

$$\int_{-\varphi_2}^{\varphi_1} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)_{t=-t_1} d\varphi = \int_{-\varphi_2}^0 \left( \frac{\partial\Phi_2}{\partial t} \right)_{t=-t_1} d\varphi + \int_0^{\varphi_1} \left( \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} \right)_{t=-t_1} d\varphi = 0 \quad (19)$$

Подставляя значения функций  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  из (8) и (9) в (19) и произведя интегрирование, после некоторого преобразования для определения постоянной  $\Phi_0$  получим следующую формулу:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(r_2^2 - 2\Phi_0) - \frac{2m}{\varphi_2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Y_p}{\lambda_p^2} = 0 \quad (20)$$

Неизвестные коэффициенты  $Y_p$ , входящие в уравнение (20), определяются из вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений (12) и выражаются через постоянную  $\Phi_0$ . Подставляя определенные из (12) значения  $Y_p$  в (20) и разрешая полученное соотношение относительно  $\Phi_0$ , получим ее значение.

Жесткость при кручении двухсвязного профиля определяется формулой

$$C = 2G \left| -U_0^* \Omega_0^* + U_0 \Omega_0 + \iint_{\Omega} U d\Omega \right| = \\ = 2G \left| -U_0^* \Omega_0^* + U_0 \Omega_0 + 2\pi \iint_{\Omega^*} U d\Omega \right|, \quad (21)$$

где  $U_0^*$  — значение функции напряжения на внешнем контуре, а  $U_0$  — на внутреннем контуре сечения,  $\Omega_0^*$  — площадь, ограниченная внешним контуром  $\Gamma_0^*$ ,  $\Omega_0$  — площадь, ограниченная внутренним контуром  $\Gamma_0$ ,  $\Omega$  — область сечения стержня,  $\Omega^* = \frac{1}{2\pi}$ -ая часть области сечения.

Подставляя в (21) значение (3) и пользуясь выражениями (8) — (10), после интегрирования для жесткости стержня получим следующую формулу

$$C = 2G \left\{ \frac{\pi}{4} (r_2^4 - r_1^4) + \frac{\pi}{4t_1} (2\Phi_0 - r_2^2)(r_2^2 - r_1^2) + \right. \\ \left. + \frac{n\varphi_2}{4} (r_3^4 - r_2^4) - \frac{n\varphi_2}{4t_2} (r_3^2 - r_2^2)^2 + \right. \\ \left. + 2n \left[ \frac{mr_2^2}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y}{\lambda_k (4 - \lambda_k^2)} \left( \operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{e^{-2t_1}}{\operatorname{sh} \lambda_k t_1} - \frac{e^{2t_2}}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} \right) - \frac{4r_2^4}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \gamma_k \varphi_2}{\gamma_k (4 + \gamma_k^2)} |1 + (-1)^{k+1} e^{2t_2}|^2 - \right. \\ \left. \left. - \frac{r_2^2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k [1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}]}{\beta_k (4 + \beta_k^2)} (\operatorname{th} \beta_k \varphi_1 + \operatorname{th} \beta_k \varphi_2) \right] \right\}. \quad (22)$$

В табл. 1 приведены значения жесткостей с избытком и с недостатком, вычисленные по формуле (22) для стержней с шестью зубцами (фиг. 1), когда

$$\frac{r_2}{r_1} = 1,964; \quad \frac{r_3}{r_2} = 1,252; \quad t_1 = 0,675; \quad t_2 = 0,225; \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{12} \quad (23)$$

и для стержней с одной выточкой (фиг. 2), когда

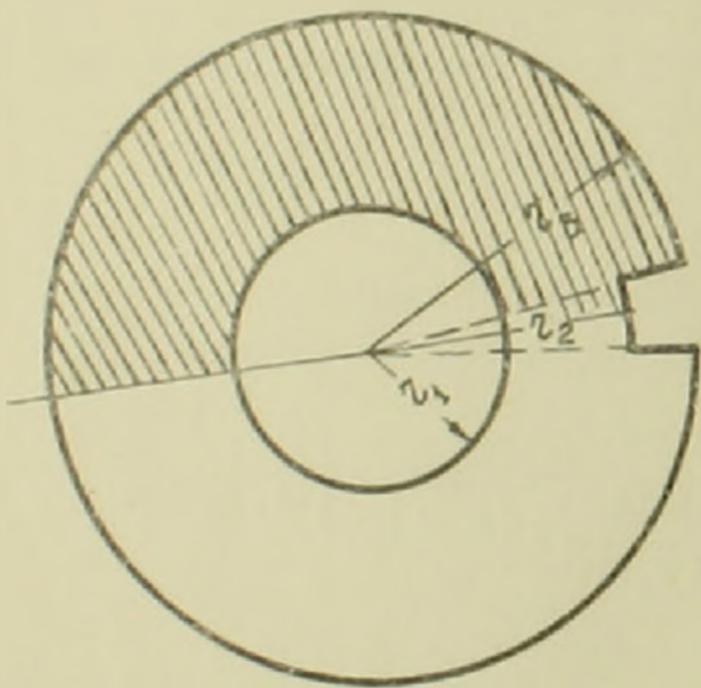
$$\frac{r_2}{r_1} = 1,964; \quad \frac{r_3}{r_2} = 1,252; \quad \varphi_1 = 7^\circ 09' 43''; \quad \varphi_2 = 172^\circ 50' 17''. \quad (24)$$

В этой же таблице для сравнения приводятся также жесткости стержней с сечениями в виде круговых колец с размерами  $\frac{r_2}{r_1} = 1,964$  и  $\frac{r_3}{r_1} = 2,4595$ , из которых первое кольцо получается из профиля с зубцами (фиг. 1), если зубцы снять ( $r_3 = r_2$ ), а второе кольцо получа-

Таблица 1

	Круговое кольцо $\frac{r_2}{r_1} = 1,964$	Круговое кольцо с 6-ю наружными зубцами			Круговое кольцо с одной выточкой			Круговое кольцо $\frac{r_3}{r_1} = 2,4595$
		недост.	избыток.	средн.	недост.	избыток.	средн.	
Постоянные $\frac{2\Phi_0}{r_2^2}$	1.0	1.237	1.238	1.2375	1.523	1.525	1.524	1.568
жесткости $\frac{C}{Gr_2^4}$	1.465	2.929	2.941	2.935	3.621	3.628	3.624	3.758

ется из профиля с выточкой (фиг. 2), если выточку заполнить ( $r_2 = r_1$ ). В табл. 1 приводятся также значения постоянной  $\Phi_0$  с избытком и с недостатком, вычисленные по формуле (20).



Фиг. 2.

В табл. 2 приведены напряжения  $\tau_{2\varphi}$  при кручении круглого полого стержня, имеющего шесть наружных, симметрично расположенных зубцов (фиг. 1) с размерами, данными в (23).

Аналогичным способом рассмотрено кручение круглого призматического стержня, имеющего центрально расположенную полость с симметричными продольными пазами или зубцами (фиг. 3)

Таблица 2

Точки сечения		$(0, \varphi_1)$	$(-\frac{t_1}{2}, \varphi_1)$	$(-t_1, \varphi_1)$	$(t_2, -\varphi_2)$	$(\frac{t_2}{2}, -\varphi_2)$	$(-\frac{t_1}{2}, -\varphi_2)$	$(-t_1, -\varphi_2)$
		$\frac{\tau_{2\varphi}}{Gr_2}$	с недостатком	1.227	0.804	0.545	0.676	0.563
	с избытком	1.229	0.804	0.546	0.676	0.564	0.612	0.475

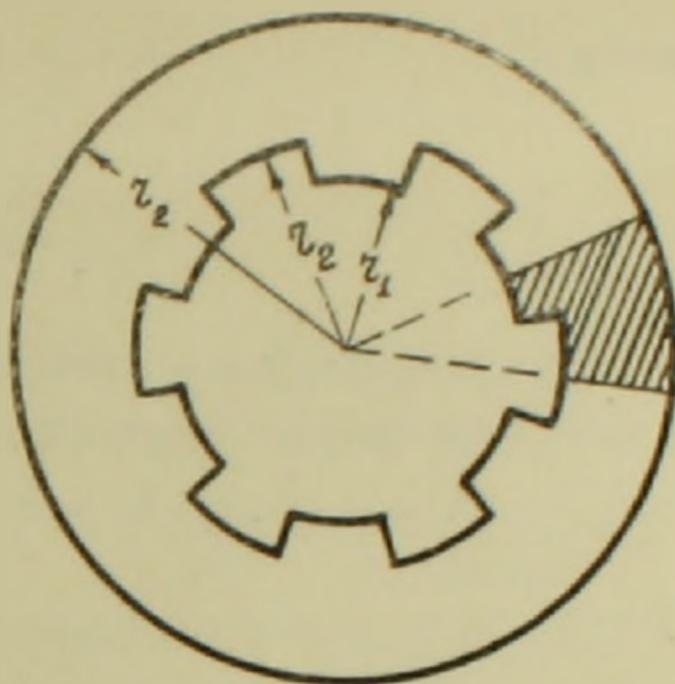
В табл. 3 приводятся значения жесткостей, вычисленные для таких стержней с шестью зубцами, когда

$$\frac{r_3}{r_1} = \frac{r_3}{r_2} = 1,964; \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{12}. \quad (25)$$

В этой же таблице для сравнения приводятся также жесткости стерж-

Таблица 3

	Круговое кольцо $\frac{r_3}{r_2} = 1,964$	Круговое кольцо с 6-ю внутренними зубцами			Круговое кольцо $\frac{r_3}{r_1} = 3,857$
		недост.	избыток.	средн.	
Жесткости $\frac{C}{Gr_2^4}$	21.801	22.062	22.086	22.074	23.266



Фиг. 3.

ней с сечениями в виде круговых колец

с размерами  $\frac{r_3}{r_2} = 1,964$  и  $\frac{r_3}{r_1} = 3,857$ .

Институт математики и механики  
Академии наук Армянской ССР

Բ. Լ. ԱՐՄՅԱՆՍՅԱՆ ԵՎ Ա. Մ. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

**Լծկայնական ակոսներ կամ առամհեր և կենտրոնական դիրեով  
խոռոչ ունեցող կլոր ձողերի ոլորումը**

Հողվածում դիտարկվում են առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ դասավորված երկայնական արտաքին ակոսներ և կենտրոնական կլոր խոռոչ ունեցող, ինչպես նաև կենտրոնական խոռոչով և ներքին երկայնական ակոսներ ունեցող կլոր ձողերի ոլորման խնդիրները:

Այս խնդիրների ճշգրիտ լուծումը ստացված է սծանդակ ֆունկցիաների ներմուծման եղանակով, որը շարադրված է (1-3) աշխատանքներում:

Ինտեգրման հաստատունների որոշումը բերվում է գծային անվերջ հավասարումների սիստեմների լուծման: Ապացուցված է, որ ստացված սիստեմները լիովին ունենում են և ունեն վերևից սահմանափակված և գերոյի ձգտող ազատ անդամներ (երբ  $k \rightarrow \infty$ ):

Երկու դեպքի համար՝ երբ ձողն ունի ա) կլոր խոռոչ և 6 արտաքին երկայնական ակոսներ, բ) կլոր խոռոչ և մի արտաքին երկայնական ակոս հաշվված են ոլորման կոշտությունները և լարումները: Իսկ մի ուրիշ դեպքի համար՝ երբ գլանաձև ձողն ունի կենտրոնական խոռոչ և 6 ներքին երկայնական ակոսներ հաշվված է ոլորման կոշտությունը:

Ստացված արդյունքների մի մասը բերված են №№ 1, 2 և 3 աղյուսակներում:

**ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ**

<sup>1</sup> Н. Х. Арутюнян, ПММ, т. XIII, в. 1, 107 — 112 (1949), ДАН АрмССР, т. IX, № 2, 67 — 74, 1948. <sup>2</sup> Б. Л. Абрамян, ДАН АрмССР, т. XXVIII, № 3, 109 — 116, 1954. <sup>3</sup> Б. Л. Абрамян, ДАН АрмССР, т. XXVIII, № 5, 1959. <sup>4</sup> Стэнеску и Думи-преску, Torsiunea barelor cilindrice prevazute cu canal de pana, Comun, Acad. RPR, 8, № 6, 1958. <sup>5</sup> Маня, Torsiunea arborelui cu caneluri radiale exterioare, Studii si cercetari мес. apl. Acad. RPR, 1958, 9, № 2, 423 — 433.