ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXIX 1959 5

МАТЕМАТИКА

А. Е. Аветисян

Две теоремы о функциях, аналитических в угловых областях

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 21. X. 1959)

Отнесем к классу $A^{(\alpha)}[\rho_1, \sigma_1]$ (где $\rho_1 > 0$, $\sigma_1 > 0$, $0 < \alpha < 2$) функции, голоморфные внутри угла Δ_α $\left(|\arg z| < \frac{\pi}{2}\alpha\right)$, для которых имеет место оценка вида

$$|F(z)| < M_F e^{\sigma_1 |z|^{\rho_1}}, \quad z \in \Delta_\alpha, \tag{1}$$

где M_F — постоянная, зависящая только от функции $F(z)$.

Полагая, что $F(z) \in A^{(\alpha)}[\rho_1, \sigma_1]$, рассмотрим интеграл

$$g(z) = \rho (ze^{-i\theta})^{\mu\rho} z^{-1} \int\limits_0^\infty F(te^{-i\theta}) e^{-t^\rho (ze^{-i\theta})^\rho} t^{\mu\rho-1} dt \quad |\theta| < \frac{\pi}{2}\alpha, \tag{2}$$

$$\text{где } \rho \geq \max\{\rho_1, (2-\alpha)^{-1}\}; \ \frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}.$$

Здесь, как и впредь, для данных θ $(-\pi < \theta < \pi)$ и $\gamma > 0$ в разрезанной по лучу $\arg z = \theta + \pi$ плоскости мы будем рассматривать те ветви функции $(ze^{-i\theta})^\gamma$, которые принимают вещественные и положительные значения на луче $\arg z = \theta$.

Обозначим через $D(\theta, \rho, \sigma)$ множество тех точек плоскости z, для которых выполняется условие

$$Re\,(ze^{-i\theta})^\rho > \sigma \quad \left(|\arg z - \theta| < \frac{\pi}{2\rho}\right).$$

Сумму всех областей $D(\theta, \rho, \sigma)$ $\left(|\theta| \leq \frac{\pi}{2}\alpha\right)$ обозначим через $D_\alpha(\rho, \sigma)$. Пусть $L_\alpha(\rho, \sigma)$ — ее граница.

Контур $L_\alpha(\rho, \sigma)$ состоит из дуги окружности $|z| = \sigma^{1/\rho}$ $|\arg z| < \frac{\pi}{2}\alpha$ и из кривых

$$\Gamma_{\alpha}^{(+)}(\rho, \sigma);\ z = z^{(+)}(\tau) = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\alpha + \frac{\pi}{2\rho}\right)} \sqrt[\rho]{\tau - i\sigma}$$

$$(0 < \tau < \infty) \qquad (3)$$

$$\Gamma_{\alpha}^{(-)}(\rho, \sigma);\ z = z^{(-)}(\tau) = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\alpha - \frac{\pi}{2\rho}\right)} \sqrt[\rho]{\tau + i\sigma}.$$

В работе [1] доказана следующая

Теорема А. Пусть функция $F(z)$ принадлежит классу $A^{(\alpha)}[\rho_1, \tau_1]$, тогда функция

$$g(z) = \rho (ze^{-i\theta})^{\mu\rho} z^{-1} \int_0^{\infty} F(te^{-i\theta}) e^{-t^{\rho}(ze^{-i\theta})^{\rho}} t^{\mu\rho - 1}\, dt \quad |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2}\alpha, \qquad (4)$$

где $\rho > \max\{\rho_1, (2-\alpha)^{-1}\}$, $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$ *голоморфна во всей области* $D_\alpha(\rho, \sigma_1)$ (*формулой* (4) *она определяется в области* $D(\theta, \rho, \sigma_1)$).

Имеет место интегральное представление

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{\alpha}(\rho, \sigma)} E_{\rho}(z\zeta; \mu)\, g(\zeta)\, d\zeta, \quad z \in \Delta_{\alpha}, \qquad (5)$$

где $E_{\rho}(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})}$ — *целая функция типа Миттаг-Леффлера,* $\sigma > \sigma_1$ — *любое, а интеграл* (5) *сходится абсолютно.*

В первой части настоящей заметки на основании теоремы A доказывается теорема типа Г. Полна [2] для функций, аналитических в области угла и имеющих там порядок роста ρ и тип σ. Во второй части доказывается теорема об интегральном представлении функций, аналитических на системе угловых областей, вершины которых находятся в начале координат.

1°. Пусть $\rho > \frac{1}{2}$. Рассмотрим в плоскости z семейство кривых

$$Re(ze^{-i\varphi})^{\rho} = \sigma, \quad |\arg z - \varphi| \leqslant \frac{\pi}{2\rho}, \qquad (6)$$

где $z = re^{i\theta}$, а параметры φ и σ изменяются соответственно в пределах $[0, 2\pi]$ и $[0, \infty)$. Любая кривая из семейства (6) делит плоскость z на две бесконечные области. Замыкание каждой из этих областей назовем элементарной ρ — выпуклой областью. При $\sigma > 0$ одна из этих областей содержит точку $z = 0$, а при $\sigma = 0$ кривые (6) представляют собой совокупность двух лучей, исходящих из начала координат и составляющих угол с раствором $\frac{\pi}{\rho}$ и с биссектрисой $\arg z = \varphi$.

Определение. Точечное множество M называется ρ выпуклым, если оно может быть представлено как пересечение (конечного или бесконечного множества) элементарных ρ — выпуклых областей.

Пересечение M_ρ — всех ρ — выпуклых областей, содержащих множество M, назовем наименьшей ρ — выпуклой оболочкой множества M. Для ρ — выпуклого множества D определим ρ — опорную функцию $K_\rho(\varphi)$ следующим образом

$$K_\rho(\varphi) = \begin{cases} \max\limits_{\substack{z \in D \\ |\arg z - \varphi| \leq \frac{\pi}{2\rho}}} Re\,(e^{-i\varphi} z)^\rho = \max\limits_{\substack{re^{i\theta} \in D \\ |\theta - \varphi| \leq \frac{\pi}{2\rho}}} r^\rho \cos\rho(\theta - \varphi) \\ 0, \text{ когда в угле } |\arg z - \varphi| \leq \frac{\pi}{2\rho} \text{ не имеется точек из } D. \end{cases}$$

Пусть $F(z)$ — аналитическая функция в области $|\arg z| < \frac{\pi}{2}\alpha$, $(0 < \alpha < 2)$ и там имеет порядок $\rho > (2-\alpha)^{-1}$ и нормальный тип σ, т. е.

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \ln M_{\alpha,f}(r)}{\ln r} \text{ и } \sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_{\alpha,f}(r)}{r^\rho},$$

где

$$M_{\alpha,f}(r) = \max_{\substack{|z|=r \\ |\arg z| < \frac{\pi}{2}\alpha}} |F(z)|$$

Пусть, далее, $h(\varphi)$ — индикатриса роста функции $F(z)$

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln |F(re^{i\varphi})|}{r^\rho} \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}\alpha.$$

Рассмотрим функцию

$$g(z) = \rho\,(ze^{-i\varphi})^{\mu\rho} z^{-1} \int\limits_0^\infty F(te^{-i\varphi}) e^{-t^\rho (e^{-i\varphi} z)^\rho} t^{\mu\rho - 1} dt$$

$$\left(\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}\right). \tag{7}$$

Из теоремы А имеем, что функция $g(z)$ аналитична в области $D_\alpha(\rho, \sigma)$, т. е. все ее особенности лежат в дополнительной к $D_\alpha(\rho, \sigma)$ области.

Относительно связи расположения особых точек $g(z)$ и роста функции $F(z)$ справедлива следующая

Теорема 1. Пусть 1) $F(z)$—голоморфна в угле $|\arg z| < \frac{\pi}{2}\alpha$ и имеет там порядок $\rho \geq (2-\alpha)^{-1}$ и тип $\sigma > 0$. 2) $K_\rho(\varphi)$ — ρ—опорная функция наименьшей ρ — выпуклой оболочки M_ρ множества M всех особых точек функции $g(z)$.

Тогда функции $K_\rho(\varphi)$ и $h(-\varphi)$ в отрезке $-\frac{\pi}{2}\alpha \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\alpha$

положительны для одних и тех же φ и для таких φ имеет место равенство

$$K_\rho(\varphi)=h(-\varphi).$$

Доказательство. Достаточно доказать утверждение теоремы для любых φ из открытого интервала $\left(-\frac{\pi}{2}\alpha, \frac{\pi}{2}\alpha\right)$, так как утверждение теоремы в случае $|\varphi|=\frac{\pi}{2}\alpha$ будет следовать из непрерывности функций $K_\rho(\varphi)$ и $h(\varphi)$. Пусть $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2}\alpha, \frac{\pi}{2}\alpha\right)$ и $K_\rho(\varphi)>0$. Это значит, что внутри угла $\Delta_\rho(\varphi)\left(|\arg z-\varphi|<\frac{\pi}{2\rho}\right)$ имеется хотя бы одна точка из M_ρ. Для функции $F(z)$ по теореме A имеем представление

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_\alpha(\rho,\sigma+\delta)} E_\rho(z\zeta;\mu)g(\zeta)\,d\zeta,\quad z\in\Delta_\alpha, \tag{8}$$

где $\delta>0$ — любое, а интеграл сходится абсолютно.

Из (8) имеем

$$|F(re^{-i\varphi})|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_\alpha(\rho,\sigma+\delta)}|E_\rho(re^{-i\varphi}\zeta;\mu)|\,|g(\zeta)|\,|d\zeta|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L'_\alpha(\rho,\sigma+\delta)}|E_\rho(re^{-i\varphi}\zeta;\mu)|\,|g(\zeta)|\,|d\zeta|+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L''_\alpha(\rho,\sigma+\delta)}|E_\rho(re^{-i\varphi}\zeta;\mu)|\,|g(\zeta)|\,|d\zeta|, \tag{9}$$

где $L'_\alpha(\rho,\sigma+\delta)$ та часть (конечная) кривой $L_\alpha(\rho,\sigma+\delta)$, на которой $|\arg\zeta-\varphi|<\frac{\pi}{2\rho}+\eta$, где η достаточно малое число. Так как, очевидно, $g(z)$ голоморфна вне M_ρ, то любая часть контура $L_\alpha(\rho,\sigma+\delta)$, находящаяся в угле, внутреннем к $\Delta_{\alpha+\frac{1}{\rho}}$, можно заменить любой кривой с теми же концами, лежащей вне M_ρ.

Пусть $\varepsilon>0$ произвольное. Мы можем $L_\alpha(\rho,\sigma+\delta)$ заменить кривой $l(\eta,\varepsilon)$, которая обладает следующими свойствами: 1) $l(\eta,\varepsilon)$ лежит вне M_ρ и имеет те же концы, что и $L_\alpha(\rho,\sigma+\delta)$, 2) часть $l'(\eta,\varepsilon)$ кривой $l(\eta,\varepsilon)$, лежащая в угле $|\arg z-\varphi|<\frac{\pi}{2\rho}+\frac{\eta}{2}$, настолько близка к M_ρ (и η — настолько мала), что

$$\max_{\zeta\in l'(\eta,\varepsilon)} Re\,(e^{-i\varphi}\zeta)^\rho<K_\rho(\varphi)+\varepsilon. \tag{10}$$

Из (9) и из асимптотических свойств функции $E_\rho(z;\mu)$ ([3]) имеем

$$|F(re^{-i\varphi})| < A \max_{\zeta \in l'(\rho, \sigma+\delta)} \{ (re^{-i\varphi}\zeta)^{\rho(1-\mu)} \} \times$$

$$\times \exp \left[\max_{\zeta \in l'(\rho,\sigma+\delta)} Re\,(re^{-i\varphi}\zeta)^\rho \right] + B(r), \tag{11}$$

где A постоянная, а $B(r) > 0$ остается ограниченным при $r \to \infty$. Имея в виду (10), из (11) получаем

$$h(-\varphi) \leqslant K_\rho(\varphi) \tag{12}$$

в предположении, что внутри угла $\Delta_\rho(\varphi)$ имеются точки из M_ρ. Пусть теперь в угле $\Delta_\rho(\varphi)\left(|\varphi| < \frac{\pi}{2}\alpha\right)$не имеется точек из M_ρ. Снова имеем соотношение (9). Для заданного $\varepsilon > 0$ снова можем $L'_\alpha(\rho, \sigma+\delta)$ заменить кривой $l(\eta, \varepsilon)$, которая лежит вне M_ρ, имеет те же концы, что и $L'_\alpha(\rho, \sigma+\delta)$ и ее часть $l'(\eta, \varepsilon)$, лежащая в угле $|\arg z - \varphi| < \frac{\pi}{2\rho} + \frac{\eta}{2}$, настолько близка к сторонам угла $\Delta_\rho(\varphi)$, что

$$\max_{\zeta \in l_1(\eta,\varepsilon)} Re\,(e^{-i\varphi}\zeta)^\rho < \varepsilon$$

и снова, как и выше, получаем

$$h(-\varphi) \leqslant 0,$$

когда в указанном угле не имеется точек из M_ρ. Но в этом случае по определению $K_\rho(\varphi) = 0$. Таким образом, соотношение (12) имеет место для всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}\alpha, \frac{\pi}{2}\alpha\right)$. Отсюда следует, что если $h(-\varphi) > 0$ $\left(|\varphi| < \frac{\pi}{2}\alpha\right)$, то $K_\rho(\varphi) > 0$. Обратно, из $K_\rho(\varphi) > 0$ следует, что $h(-\varphi) > 0$. Действительно, из $h(-\varphi) \leqslant 0$ в силу формулы (7) следовало бы, что $g(z)$ не имеет особых точек внутри угла $\Delta_\rho(\varphi)$, что противоречит условию $K_\rho(\varphi) > 0$.

Пусть $h(-\varphi) > 0$, докажем неравенство, обратное к (12). При $z \in D(\varphi, \rho, \sigma)$ имеем

$$|g(z)| < A|z|^{\mu\rho-1} \int_0^\infty e^{-t^\rho [Re\,(e^{-i\varphi}z)^\rho - h(-\varphi) - \varepsilon]} t^{\mu\rho-1} dt.$$

Из этой оценки следует, что все особые точки $g(z)$, лежащие в угле $\Delta_\rho(\varphi)$, находятся в области

$$Re\,(e^{-i\varphi}z)^\rho \leqslant h(-\varphi) + \varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем

$$K_\rho(\varphi) \leqslant h(-\varphi). \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует утверждение теоремы.

В случае, когда имеется целая функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})}$ порядка $\rho > \frac{1}{2}$ и типа $\sigma > 0$, то функция $g(z)$, определяемая в области $D(\varphi, \rho, \sigma)$ формулой (7), голоморфна в области $|z| > \sigma^{1/\rho}$ и в этой области представима рядом $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{z^{n+1}}$ ([1]).

Разделим всю плоскость z на угловые части с общей вершиной в начале координат с растворами меньшими, чем $\pi\gamma$, где $\gamma < 2 - \frac{1}{\rho}$. Применяя в каждой части теорему 1, мы получим следующее следствие для целых функций.

Следствие 1. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})} z^n$ — целая функция порядка $\rho > \frac{1}{2}$ и конечного типа $\sigma > 0$. 2) $K_\rho(\varphi)$ — ρ — опорная функция наименьшей ρ — выпуклой оболочки M_ρ множества M всех особых точек функции $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{z^{n+1}}$ и $h(\varphi)$ индикатриса роста функции $f(z)$. Тогда функции $K_\rho(\varphi)$ и $h(-\varphi)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ одновременно положительны и там, где они положительны, имеет место равенство

$$K_\rho(\varphi) = h(-\varphi).$$

Результат этого следствия был изложен в заметке ([5]). В несколько менее четкой форме он содержится в более ранней работе ([6]).

2°. Пусть $F(z) \in A^*[\rho, \sigma_1]$, $g(z) - B_\rho$ ассоциированная с $F(z)$ функция в смысле теремы А, определяемая в области $D(0, \rho, \sigma_1)$ формулой (7), где $\rho > (2-\alpha)^{-1}$ и $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$. Теорема А утверждает, что при $z \in \Delta_\alpha$ интеграл (5) сходится абсолютно. Этот интеграл, вообще говоря, не имеет смысла вне угла Δ_α. Однако оказывается, что в некоторых случаях этот интеграл абсолютно сходится в определенных областях, лежащих вне угла Δ_α. Обозначим через $B(\alpha, \rho)$ область угла $|\arg z| > \frac{\pi}{2}\alpha + \frac{\pi}{\rho}$. При вышеуказанных предположениях справедливы следующие предложения.

Лемма 1. *Если* $\frac{\pi}{2}\alpha + \frac{\pi}{\rho} < \pi$ $(0<\alpha<2)$, *то интеграл*

$$\int\limits_{L_\beta(\rho,\sigma)} E_\rho(z\zeta;\mu)\, g(\zeta)\, d\zeta, \quad (\sigma>\sigma_1 - \textit{любое}),$$

где $0<\beta<\alpha$ *абсолютно сходится внутри угла* $B(\alpha,\rho)$.

Лемма 2. *Если* $\frac{\pi}{2}\alpha + \frac{\pi}{\rho} < \pi$ и $0<\beta<\beta'<\alpha$, *то при* $z \in B(\alpha,\rho)$

$$\int\limits_{L_\beta(\rho,\sigma)} E_\rho(z\zeta;\mu)\, g(\zeta)\, d\zeta = \int\limits_{L_{\beta'}(\rho,\sigma)} E_\rho(z\zeta;\mu)\, g(\zeta)\, d\zeta.$$

Лемма 3. *Если* $\frac{\pi}{2}\alpha + \frac{\pi}{\rho} < \pi$ *и* $\beta<\alpha$, *то при* $z \in B(\alpha,\rho)$

$$\lim_{\beta\to\alpha} \int\limits_{L_\beta(\rho,\sigma)} E_\rho(z\zeta;\mu)\, g(\zeta)\, d\zeta = \int\limits_{L_\alpha(\rho,\sigma)} E_\rho(z\zeta;\mu)\, g(\zeta)\, d\zeta.$$

При доказательстве лемм 1—3 существенно используются асимптотические свойства функции $E_\rho(z;\mu)$ и тот факт, что когда $z \in D_\alpha(\rho,\sigma_1)$ и $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\rho}\right) - \delta$ (где $0<\delta<\frac{\pi}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\rho}\right)$ — любое, но фиксированное число), то при $|z|\to\infty$

$$g(z) = O\left(\frac{1}{z}\right) \tag{14}$$

равномерно относительно рассматриваемых значений z.

Лемма 4. *Если* $\frac{\pi}{2}\alpha + \frac{\pi}{\rho} < \pi$ и $z \in B(\alpha,\rho)$, *то*

$$\int\limits_{L_\alpha(\rho,\sigma)} E_\rho(z\zeta;\mu)\, g(\zeta)\, d\zeta = 0. \tag{15}$$

Доказательство. Обозначим через Γ_R замкнутый контур, пробегаемый в положительном направлении и составленный из части кривой $L_\beta(\rho,\sigma)$ $(\beta<\alpha)$, лежащей в круге $|z|\leq R$, и из дуги L_R окружности $|z|=R$, соединяющей уходящие в бесконечность ветви кривой $L_\beta(\rho,\sigma)$. По теореме Коши

$$\int\limits_{\Gamma_R} E_\rho(z\zeta;\mu)\, g(\zeta)\, d\zeta = 0. \tag{16}$$

Дуга L_R при всяком R целиком лежит в угле $|\arg z| < \frac{\pi}{2}\beta + \frac{\pi}{2\rho}$.

Поэтому согласно (14) на L_R

$$|g(\zeta)| = 0\left(\frac{1}{|\zeta|}\right). \tag{17}$$

С другой стороны, если $\zeta \in L_R$ и $z \in B(\alpha, \rho)$, то $|\arg z\zeta| > \frac{\pi}{2\rho}$ и поэтому

$$|E_\rho(z\zeta; \mu)| = 0\left(\frac{1}{|\zeta|}\right). \tag{18}$$

Из (17) и (18) следует, что

$$\lim_{R \to \infty} \int\limits_{L_R} E_\rho(z\zeta; \mu)\, g(\zeta)\, d\zeta = 0. \tag{19}$$

Из (16) и (19) при $z \in B(\alpha, \rho)$ имеем

$$\int\limits_{L_\beta(\rho, \sigma)} E_\rho(z\zeta; \mu)\, g(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Утверждение леммы 4 следует из леммы 3.

Пусть задана конечная система угловых областей

$$A^n_\Delta(\alpha, \psi);\ \Delta_{\alpha_1}(\psi_1),\ \Delta_{\alpha_2}(\psi_2) \cdots \Delta_{\alpha_n}(\psi_n) \tag{20}$$

($\Delta_{\alpha_k}(\psi_k)$ — есть угол $|\arg z - \psi_k| \leqslant \frac{\pi}{2}\alpha_k$, $0 < \alpha_k < 2$, $k = 1, 2 \cdots n$), причем углы не перекрываются и имеют общую вершину в начале координат. Дополнение этой системы углов также состоит из конечного числа угловых областей. Величину наименьшего из дополнительных углов обозначим через $\frac{\pi}{\gamma}$.

Пусть в угле $\Delta_{\alpha_k}(\psi_k)$ $(k = 1, 2 \cdots n)$ задана функция $f_k(z)$, принадлежащая классу $A^{(\alpha_k)}[\rho_k, \sigma_k]$.

Обозначим через $f(z)$ функцию, которая задана на системе (20) и такая, что

$$f(z) = f_k(z), \text{ когда } z \in \Delta_{\alpha_k}(\psi_k). \tag{21}$$

Допустим, что $g_k(z)$ $(k = 1, 2 \cdots n)$ — B_ρ ассоциированная с $f_k(z)$ функция в смысле теоремы A. При этом мы предполагаем, что входящие в определение $g_k(z)$ величины ρ и μ удовлетворяют условию

$$\rho > \max\{\gamma, \rho_1, \rho_2 \cdots \rho_n\}, \quad \frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}.$$

Под $L_{\alpha_k}(\rho, \sigma, \psi_k)$ мы будем понимать кривую $L_{\alpha_k}(\rho, \sigma)$, повернутую на угол ψ_k по отношению точки o в положительном направлении (луч $\arg z = \psi_k$ — есть ось симметрии кривой $L_{\sigma k}(\rho, \sigma, \psi_k)$).

Теорема 2. Для функции $f(z)$, определенной согласно формуле (21), *справедливо интегральное представление*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{L_{\sigma_k}(\rho, \sigma_k', \psi_k)} E_\rho(z\zeta; \mu)\, g_k(\zeta)\, d\zeta, \quad z \in A_\Delta^n(\alpha, \psi), \tag{22}$$

где $\rho > \max\{\gamma, \rho_1, \rho_2 \cdots \rho_n\}$, *а* $\sigma_k' > \sigma_k$ — *любые.*

Доказательство. По теореме A для функции $f_k(z)$ имеем представление

$$f_k(z) = \int\limits_{L_{\sigma_k}(\rho_1 \sigma_k', \psi_k)} E_\rho(z\zeta; \mu)\, g_k(\zeta)\, d\zeta, \quad z \in \Delta_{\sigma_k}(\psi_k), \quad (k = 1, 2, \cdots n) \tag{23}$$

где интеграл сходится абсолютно.

Так как $\rho \geq \gamma$, то из леммы 4 следует

$$f_k(z) = 0, \text{ когда } z \in \Delta_{\sigma_m}(\psi_m) \quad m \neq k.$$

Суммируя равенства (23) по k от 1 до n и имея в виду (21), получим представление (22).

Институт математики и
механики Академии наук Армянской ССР

Ա. Ե. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

Երկու բևեռով անկյունային տիրույթներում անալիտիկ ֆունկցիաների մասին

Աշխատանքում սահմանված են ρ- ուռուցիկ տիրույթի, ամենափոքր ρ-ուռուցիկ թաղանթի և ρ- հենման ֆունկցիայի գաղափարները: Սահմանված է նաև անկյան մեջ անալիտիկ ֆունկցիաների $A^{(\alpha)}[\rho, \sigma]$ *դասը և այդ դասի ֆունկցիաների հետ* B^ρ *-ասոցացված ֆունկցիաների գաղափարը: Ապացուցված է երկու թեորեմ, որոնք վերջինիս սահմանումների օգնությամբ ձևակերպվում են այսպես:*

Թեորեմ 1. Դիցուք 1) $F(z)$-ը հոլոմորֆ է $|\arg z| < \frac{\pi}{2}\alpha$ $(0 < \alpha < 2)$ անկյան մեջ և այնտեղ ունի $\rho > (2-\alpha)^{-1}$ կարգ և $\sigma > 0$ տիպ 2) $K_\rho(\varphi)$-ն

$$g(z) = \rho (ze^{-i\theta})^{\mu\rho} z^{-1} \int_0^\infty F(re^{-i\theta}) e^{-t^\rho (ze^{-i\theta})^\rho} t^{\mu\rho - 1} dt \quad \left(\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}\right)$$

ֆունկցիայի եզակի կետերը պարունակող ամենափոքր ρ-ուռուցիկ թաղանթի ρ-հենման ֆունկցիան է:

Այդ դեպքում $K_\rho(\varphi)$ և $h(-\varphi)$ ֆունկցիաները [$h(\varphi)$-ն $F(z)$-ի ինդիկատորն է] $\left[-\frac{\pi}{2}\alpha, \frac{\pi}{2}\alpha\right]$ հատվածում դրական են միևնույն φ-երի համար և այդպիսի φ-երի համար տեղի ունի

$$k_\rho(\zeta) = h(-\zeta)$$

առնչությունը·

Դիցուք տրված է սկզբնակետում ընդհանուր գագաթ ունեցող անկյունային տիրույթների մի սիստեմ $A^n_\Delta(\alpha, \psi)$: $\Delta_{\alpha_k}(\psi_k)$ ($|\arg z - \psi_k| < \frac{\pi}{2}\alpha_k$, $k = 1, 2, \dots n$) ընդ որում անկյունները միմյանց չեն ծածկում: Այդ սիստեմի լրացումը կազմված է վերջավոր թվով անկյունային տիրույթներից: Դրանցից ամենափոքրի բացվածքի մեծությունը նշանակենք $\frac{\pi}{\gamma}$-ով:

Դիցուք $\Delta_{\alpha_k}(\psi_k)$ անկյան մեջ տրված է $f_k(z)$ ֆունկցիան, որը պատկանում է այնտեղ $A(\alpha_k)[\rho_k, \sigma_k]$ դասին: Թող $g_k(z)$-ը լինի $f_k(z)$-ի հետ B_ρ-ասոցացված ֆունկցիան:

Թեորեմ 2. Եթե $f(z)$-ը տրված է $A^n_\Delta(\alpha, \psi)$ սիստեմի վրա և

$$f(z) = f_k(z) \text{ երբ } z \in \Delta_{\alpha_k}(\psi_k),$$

ապա նրա համար տեղի ունի

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{L_{\alpha_k}(\rho, \sigma_k^1, \psi_k)} E_\rho(z\zeta; \mu)\, g(\zeta)\, d\zeta$$

ինտեգրալ ներկայացումը, որտեղ $\rho > \max\{\gamma, \rho_1, \rho_2, \dots \rho_n\}$, $\sigma_k^1 > \sigma_k$, իսկ $L_{\alpha_k}(\rho, \sigma_k^1 \psi_k)$-ն որոշակի կոնտուր է, որի համար $\arg z = \psi_k$-ն սիմետրիայի առանցք է և որի 2 ճյուղերը անվերջ հեռանում են մոտենալով $|\arg z - \psi_k| < \frac{\pi}{2}\alpha_k + \frac{\pi}{2\rho}$ անկյան կողմերին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян,* ДАН СССР, т. 120, №3 (1958), 457—460. [2] *Г. Полиа,* Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, Math. Zeits. 29 (1929), 549—640. [3] *М. М. Джрбашян,* Известия АН СССР, серия матем., 18, (1954), 427—448. [4] *М. М. Джрбашян,* Матем. сборник, 33(75), 3 (1953), 485—530. [5] *А. Е. Аветисян,* ДАН СССР, т. 105, №5 (1955), 885—888. [6] *Г. Матисон,* Certain integral functions related to exponential sums. Duke. Math. J. 4(1938), 9.