ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXIX 1959 5

ФИЗИКА

С. М. Хзарджян

К теории нелинейных колебаний в плазме при постоянном внешнем магнитном поле

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. М. Кочаряном 27. VII 1959)

В настоящей работе мы будем рассматривать нелинейные эффекты, связанные с распространением продольных волн в плазме перпендикулярно внешнему постоянному однородному магнитному полю на основе уравнения А. А. Власова [1]. Следует отметить, что на продольные волны, распространяющиеся по направлению магнитного поля, последнее никакого влияния не оказывает. Как главный нелинейный эффект рассматривается перенос вещества волнами, выступающий как эффект второго порядка малости. Нелинейное уравнение решается по методу, предложенному в работе [2], только с тем отличием, что, следуя работе [3], разлагается в ряд производная по времени.

Исходным уравнением является уравнение А. А. Власова [1].

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\nabla_r f - \frac{1}{m}\nabla_v F \nabla_r \int \Phi(|r-r'|)\, dr' \int f(r', v, t)\, dv +$$

$$+ \frac{e}{mc}[v, H]\nabla_v f = 0, \tag{1}$$

где: $F = f_0 + f$ — функция распределения частиц,

f_0 — функция распределения равновесного состояния,

$\Phi(|r-r'|)$ — потенциальная энергия взаимодействия частиц,

m — масса частиц.

Подставим

$$f = \sum_{c=1}^{\infty} \lambda^c \varphi_c, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{c=0}^{\infty} \lambda^c \partial^c, \tag{2}$$

где λ — малый параметр.

Ищем φ_c в виде

$$\varphi_c = \sum_{l=-c}^{c} A_{c,l}(v) \cdot e^{-il(\omega t - kr)}. \tag{3}$$

Условие действительности $\varphi_c - A_{c,l}(v) = A_{c,-l}(v)$, на φ_c накладывается условие (2') $\int \varphi_c dv < \infty$ $A_{c,l}(-\infty) = A_{c,l}(\infty) = 0$. Задача заключается в определении коэффициентов разложения.

Подставляя (2) в (1) и приравнивая члены с одинаковыми степенями малости, имеем

$$\frac{\partial \varphi_c}{\partial t} + v\nabla_r\varphi_c - \frac{1}{m}\nabla_v f_0 \nabla_r \int \Phi(|r - r'|)\varphi_c dr' dv + \frac{e}{mc}[v, H]\frac{\partial \varphi_c}{\partial v} =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{c-1} \nabla_v \varphi_j \times \nabla_r \int \Phi(|r - r'|)\varphi'_{c-j} dr' dv'. \qquad (4)$$

После подстановки (3) в (4), приравниваем члены с одинаковыми $\exp\{-il(\omega t - kr)\}$; учитывая, что ∂^{I} действует на $\exp\{-il(\omega t - kr)\}$ как производная по времени, а ∂^{I}, ∂^{II} и т. д. на коэффициенты $A_{c,l}(v)$, получим ([3])

$$\frac{1}{i}\sum_{n=1}^{c-1} \partial^n A^{(v)}_{c-n,\,l} + \left[(kv - \omega)A_{c,l}(v) - \frac{\sigma_{lk}}{m} k\nabla_v f_0 a_{c,\,l}\right]\cdot l +$$

$$+ \frac{e}{imc}[v, H]\cdot\frac{\partial A_{c,\,l}}{\partial v} = \frac{k}{m}\sum_{j=1}^{c-1}\sum_{m} \nabla_v A_{j,m}(v)\, a_{c-j,\,l-m}\, \sigma_{(l-m)k}\cdot(l - m'), \qquad (5)$$

где $\qquad a_{c,l} = \int A_{c,l} dv$ и $\sigma_{lk} = \int \Phi(|r - r'|) e^{i(r-r')} k dr$.

Направим магнитное поле по оси Z и, введя цилиндрическую систему координат в пространстве скоростей ([4]), получим

$$\sum_{n=1}^{c-1} \partial^n A_{c-n,\,l} + \left[(kv - \omega)\cdot A_{c,l}(v) - \frac{\sigma_{ck}}{m} k\nabla_v f_0\cdot a_{c,l}\right]\cdot l - \omega_1\frac{\partial A_{c,l}(v)}{\partial\theta} =$$

$$= \frac{k}{m}\sum_{j=1}^{c-1}\sum_{m} \nabla_v A_{j,m}(v)\cdot a_{c-j,\,l-m}\cdot\sigma_{(l-m)k}\cdot(l - m'), \qquad (5)$$

где $\omega_1 = \dfrac{e\cdot H}{mc}$.

Решим уравнение (5) в различных приближениях.

I-е приближение $c = l = 1$

$$\left[(kv - \omega)\cdot A_{1,1}(v) - \frac{\sigma_k}{m} k\cdot\nabla_v f_0 a_{1,1}\right] - \frac{\omega_1}{i}\cdot\frac{\partial A_{1,1}(v)}{\partial\theta} = 0. \qquad (6)$$

Направим k по оси X, тогда решением (6) с учетом того, что $A_{1,1}(\theta)$ есть периодическая функция от (θ) (с периодом 2π), будет

$$A_{1,1}(v) = -\frac{i}{\omega_1}\exp\left\{\frac{i}{\omega_1}k\rho\sin\theta - \omega\theta)\right\}\cdot\int^{\theta}\frac{\sigma_k}{m}k\frac{\partial f_0}{\partial v_x}\times$$

$$\times a_{1,1} \cdot \exp\left[-\frac{i}{\omega_1}(k\rho\sin\theta - \omega\theta)\right] d\theta, \tag{7}$$

где ρ есть скорость, которая определяется при переходе к цилиндрическим координатам

$$\left.\begin{array}{l} v_x = \rho\cos\theta \\ v_y = \rho\sin\theta \end{array}\right\} \rho^2 = v_x^2 + v_y^2.$$

II-е приближение A. $c = 2$, $l = 1$

$$\frac{1}{i}\,\partial^l A_{1,1} + \left[k\rho\cos\theta - \omega) \cdot A_{2,1}(v) - \frac{\sigma_k}{m} \cdot k \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v_x} a_{2,1}\right] -$$

$$-\frac{\omega_1}{i}\frac{\partial A_{2,1}(v)}{\partial\theta} = \frac{k}{m}\frac{\partial A_{1,0}}{\partial v_x} \cdot a_{1,1} \cdot \sigma_k. \tag{8}$$

Предполагая, что $A_{2,1} = 0$ (3), мы получим из (8)

$$\frac{1}{i}\,\partial^l A_{1,1} = \frac{k}{m} \cdot \frac{\partial A_{1,0}}{\partial v_x} \cdot a_{1,1} \cdot \sigma_k. \tag{8'}$$

Интеграция (8′) по скоростям с учетом условия (2) дает

$$\partial^l a_{1,1} = 0.$$

Следовательно, мы (8′) можем записать как

$$\frac{k}{m} \cdot \frac{\partial A_{1,0}}{\partial v_x} a_{1,1} \cdot \sigma_k = 0, \qquad \text{значит } A_{1,0} = C,$$

из условия(2) получим $\qquad A_{1,0}(v) = 0. \qquad$ (9)

Так как перенос вещества волнами должен определяться членом $A_{1,0}$, то выражение (9) показывает, что в первом приближении переноса вещества нет.

II-е приближение B. $c = 3$, $l = 1$.

Из (5) имеем:

$$\left[(k\rho\cos\theta - \omega) A_{2,2}(v) - \frac{\sigma_{2k}}{m} k \frac{\partial f_0}{\partial v_x} a_{2,2}\right] - \frac{\omega_1}{2i} \cdot \frac{\partial A_{2,2}(v)}{\partial\theta} =$$

$$= \frac{k}{m} \cdot \frac{\partial A_{1,1}(v)}{\partial v_x} \cdot a_{1,1}\sigma_k. \tag{9}$$

Решением которого будет:

$$A_{(2,2)}(\theta) = -\frac{2i}{\omega_1} \cdot \exp\left[\frac{2i}{\omega_1}(k\rho\sin\theta - \omega\theta)\right] \cdot \int^{\theta}\left[\frac{\sigma_{2k}}{m} k \frac{\partial f_0}{\partial v_x} a_{2,2} + \right.$$

$$\left. + \frac{k}{2m} \cdot \frac{\partial A_{1,1}}{\partial v_x} \cdot a_{1,1}\sigma_k\right] \cdot \exp\left[-\frac{2i}{\omega_1}(k\rho\sin\theta - \omega\theta)\right] d\theta.$$

III-е приближение $c = 3,\ l = 1$.

Из (5) следует
$$\frac{1}{i}\partial^{II} A_{1,1} + \Big[(k\rho\cos\theta - \omega\theta)A_{3,1}(v) - \frac{\sigma_k}{m} k \frac{\partial f_0}{\partial v_x} a_{3,1}\Big] - \frac{\omega_1}{i}\cdot\frac{\partial A_{3,1}(v)}{\partial\theta} = \frac{k}{m}\Big[\frac{\partial A_{1,-1}(v)}{\partial v_x} a_{2,2}\cdot\sigma_{2k}\cdot 2 +$$
$$+ \frac{\partial A_{2,2}(v)}{\partial v_x}\cdot a_{1,-1}\cdot\sigma_{-k}\cdot(-1) + \frac{\partial A(v)_{2,0}}{\partial v_x}\cdot a_{1,1}\cdot\sigma_k\Big],$$

предполагая $A_{3,1} = 0$ ([3]), получим
$$\frac{1}{i}\partial^{II} A_{1,1}(v) = \frac{k}{m}\cdot\Big[\frac{\partial A_{1,-1}(v)}{\partial v_x}\cdot a_{2,2}\cdot\sigma_{2k}\cdot 2 +$$
$$+ \frac{\partial A_{2,2}(v)}{\partial v_x} a_{1,-1}\cdot\sigma_{-k}\cdot(-1) + \frac{\partial A_{2,0}}{\partial v_x} a_{1,1}\cdot\sigma_k\Big], \tag{10}$$

интегрируя (10) по v, получим
$$\partial^{II} a_{1,1} = 0.$$

Следовательно (10) можно переписать как
$$\frac{\partial A_{1,-1}(v)}{\partial v_x} a_{2,2}\cdot\sigma_{2k}\cdot 2 + \frac{\partial A_{2,2}(v)}{\partial v_x}\cdot a_{1,-1}\cdot\sigma_{-k}\cdot(-1) +$$
$$+ \frac{\partial A_{2,0}}{\partial v_x}\cdot a_{1,1}\cdot\sigma_k = 0. \tag{11}$$

Из (11) легко получить
$$A_{2,0}(v) = \frac{a_{1,-1}\cdot\sigma_{-k}}{a_{1,1}\cdot\sigma_k}\cdot A_{2,2}(v) - \frac{a_{2,2}\cdot\sigma_{2k}\cdot 2}{a_{1,1}\cdot\sigma_k}\cdot A_{1,-1}(v) + C.$$

Из условия (2) получим $C = 0$.

Плотность переноса вещества волнами будет
$$J_{2,0} = \int A_{2,0}(v)\cdot v_x\, dv. \tag{12}$$

Обозначим
$$J_1 = \int\limits_{(v)} A_{2,2}(v)\cdot v_x\, dv, \qquad J_2 = \int\limits_{(v)} A_{1,-1}(v)\cdot v_x\cdot dv,$$

и
$$\alpha' = \frac{a_{1,-1}\cdot\sigma_{-k}}{a_{1,1}\cdot\sigma_k}, \qquad \gamma = \frac{2a_{2,2}\cdot\sigma_{2k}}{a_{1,1}\cdot\sigma_k}.$$

Получим
$$J_{2,0} = \alpha'\cdot J_1 - \gamma J_2.$$

В дальнейшем, употребляя соотношение $e^{iz\sin\theta} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\cdot e^{in\theta}$

где $J_n(z)$ функция Бесселя) и свойства бесселевых функций

$$J_n(-z) = (-1)^n J_n(z), \quad J_{-n}(z) = (-1)^n \cdot J_n(z)$$

и вводя обозначения

$$A^{\pm}(n, n' \pm 2\gamma) = \frac{(n + n' \pm 2\gamma)\, J_{n+n'\pm 2\gamma}\left(\frac{2ks}{\omega_1}\right)}{\left(n \pm 1 + \frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(n + n' \pm 2\gamma + \frac{2\omega}{\omega_1}\right)}.$$

После довольно громоздких вычислений получим

$$J_1 = -\frac{\sigma_{2k}}{2m} a_{2,2} \int_0^\infty \frac{\partial f_0}{\partial \rho} \Sigma J_n\left(\frac{2k\rho}{\omega_1}\right)\left[\frac{(n+1)\cdot J_{n+1}\left(\frac{2k\rho}{\omega_1}\right)}{n+1+2\frac{\omega}{\omega_1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)\cdot J_{n-1}\left(\frac{2k\rho}{\omega_1}\right)}{n-1+2\cdot\frac{\omega}{\omega_1}}\right]\rho d\rho - \frac{k\sigma_k^2 \cdot a_{1,1}^2}{8m^2\omega_1} \int_0^\infty \left\{\frac{\partial^2 f_0}{\partial \rho^2} \sum_n \sum_{n'} J_n\left(\frac{k\rho}{\omega_1}\right) \times \right.$$

$$\times J_{n'}\left(\frac{k\rho}{\omega_1}\right)\cdot \sum_{\gamma=0}^{1} A^{\pm}(n, n' \pm 2\gamma)\rho + \frac{\partial f_0}{\partial \rho} \sum_n \sum_{n'} \frac{\partial J_n\left(\frac{k\rho}{\omega_1}\right)}{\partial \rho} \times$$

$$\times J_{n'}\left(\frac{k\rho}{\omega_1}\right)\cdot \sum_{\gamma=0}^{1} A^{\pm}(n, n' \pm 2\gamma)\rho + \frac{\partial f_0}{\partial \rho} \sum_n \sum_{n'} J_n\left(\frac{k\rho}{\omega_1}\right) \times$$

$$\times J_{n'}\left(\frac{k\rho}{\omega_1}\right)\{(n+1)\,[A^+(n, n'+2) - A^+(n, n')] +$$

$$\left. + (n-1)\cdot[A^-(n, n') - A^-(n, n'-2)]\}\right\} d\rho.$$

Совершая аналогичное вычисление для J_2 и употребляя приближенное выражение функции Бесселя при малых аргументах

$$J_n(z) = \frac{z_n}{2^n n!}, \quad J_0(z) = \left(1 - \frac{z^2}{4}\right)$$

и выбирая функцию $f_0(\rho) = n \cdot \frac{m}{\varkappa T} e^{-\frac{m}{2\varkappa T}\rho^2}$,

$\varkappa$ — постоянная Больцмана, окончательно получим

$$J_{2,0} = |a_{1,1}|^2 \frac{\sigma_{-k}\sigma_k}{m^2}\left(\frac{k}{\omega_1}\right)^3 n\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\left\{\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\frac{\sigma_{2k}}{m}\frac{nk^2}{\omega_1^2}\frac{\omega_1}{\omega}\frac{1}{1-\frac{\sigma_{2k}}{\sigma_k}} + \right.$$

$$+\frac{8xT}{m}\left(\frac{k}{\omega_1}\right)^2\left[\frac{\sigma_{2k}}{m}\,n\left(\frac{k}{\omega_1}\right)^2\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^3\frac{483}{202}\,\frac{1}{1-\frac{\sigma_{2k}}{\sigma_k}}+\frac{141}{768}\right]\Bigg\}. \qquad (13)$$

В выражении (13) рассмотрен случай $\omega \gg \omega_1$.

Исследуем последнее выражение, условием обращения которого в нуль будет

$$\frac{8xT}{m}=\frac{3}{4}\,\frac{\omega_1^2}{k^2}\,\frac{\frac{\sigma_{2k}}{m}\,\frac{nk^2}{\omega_1^2}\,\frac{\omega_1}{\omega}\,\frac{1}{1-\frac{\sigma_{2k}}{\sigma_k}}-1}{\frac{\sigma_{2k}}{m}\,n\left(\frac{k}{\omega_1}\right)^2\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^3\frac{483}{202}\cdot\frac{1}{1-\frac{\sigma_{2k}}{\sigma_k}}+\frac{141}{768}}. \qquad (14)$$

Выражение (13) показывает, что плотность переноса частиц существенно зависит от сил взаимодействия между частицами. Когда $\sigma_k<0$, плотность потока при нулевой температуре больше, чем в случае $\sigma_k>0$, причем с увеличением температуры поток при $\sigma_k>0$ уменьшается быстрее, чем при $\sigma_k<0$.

Выражение (14) показывает, что при некоторых температурах плотность потока для определенных магнитных полей исчезает, конечно, последнее соотношение не дает точной закономерности, так как при его выводе в выражении (13) в фигурных скобках первый член принят равным второму, а в действительности наше приближение верно, когда второй член всегда меньше первого. Но тем не менее, оно достаточно верно отражает качественную сторону явления.

В заключение выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю А.А. Власову за предложенную тему и за ценные советы при выполнении работы.

Физический факультет Московского государственного
университета им. Ломоносова

Ս. Մ. ԽՋԱՐՋՅԱՆ

Պլազմայում ոչ գծային տատանումների տեսությունը արտաքին հաստատուն և համասեռ մագնիսական դաշտի նկատմամբ

Հիմնվելով Ա. Ա. Վլասովի (1) հավասարման վրա, հոդվածում ուսումնասիրվել են երկայնական ալիքների շնորհիվ կատարվող ոչ գծային տատանումները պլազմայում, արտաքին հաստատուն և համասեռ մագնիսական դաշտի առկայության դեպքում։ Քանի որ մագնիսական դաշտը մագնիսական դաշտի ուղղությամբ տարածվող երկայնական ալիքների վրա ոչ մի ազդեցություն չի գործում, ապա հոդվածում ուսումնասիրվում են միայն արտաքին մագնիսական դաշտային ուղղահայաց տարածվող երկայնական ալիքները։ Որպես գլխավոր ոչ գծային երևույթ է համարվում նյութի տեղափոխումը ալիքների միջոցով։ Ոչ գծային հավասարումը լուծվում է (2) աշխատանքում առաջարկված եթոդով, միայն այն տարբերությամբ, որ հետևելով (3) աշխատանքին, ածանցյալը ըստ ժամանակի շարքի է վերածվում:

Արդյունքները ցույց են տալիս, որ մասնիկների տեղափոխումը ալիքների միջոցով կայես կախված է մասնիկների փոխազդեցության ուժից և մագնիսական դաշտի միջոցով կարելի է ղեկավարել մասնիկների տեղափոխման հոսքի խտության մեծությանը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. А. Власов*, Теория многих частиц, М.—Л., 1950. [2] *С. М. Хзарджян*, „Известия АН АрмССР" (серия физ.-мат. наук), т. XII, № 6 (1959). [3] *П. А. Стуррок*, Proc. Roy. Soc. Ser. A. mat. and phys. sciences, № 1230, vol. 242, 1957. [4] *Гросс*, Phys. Rev. vol. 82, № 2, 1951.