

А. Г. Багдоев

Новый способ определения давления в жидкости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 28. 7 1959)

Пусть в некоторой точке O границы полупространства, занятого сжимаемой неоднородной жидкостью, возникло некоторое давление, которое распространяется по поверхности жидкости ударной волной.

Возмущенное движение жидкости предполагаем малым и осесимметричным.

Выберем оси Or по поверхности жидкости, Oz перпендикулярно к ней. Уравнение движения для давления в жидкости $P(r, z, t)$ есть волновое уравнение с переменным коэффициентом ⁽¹⁾

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{a^2(z)} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \quad (1)$$

На границе жидкости имеем ⁽²⁾

$$P(r, 0, t) = \begin{cases} P_1(r, t) & r < R(t) \\ 0 & r > R(t), \end{cases} \quad (2)$$

где $R(t)$ — радиус фронта на поверхности, $P_1(r, t)$ — давление за фронтом, t — время.

Пусть функция $\frac{1}{a^2(z)}$ разлагается в ряд по степеням z :

$$\frac{1}{a^2(z)} = \frac{1}{a_0^2} + a_1 kz + a_2 (kz)^2 + \dots \quad (3)$$

Здесь k параметр, характеризующий неоднородность жидкости. Например, для экспоненциального изменения

$$a^2(z) = a_0^2 e^{kz}; \quad \frac{1}{a^2(z)} = \frac{1}{a_0^2} \sum_0^{\infty} \frac{k^n (-1)^n z^n}{n!}. \quad (4)$$

Ищем решение (1) посредством ряда по степеням k :

$$P = P_0 + kP_1 + k^2P_2 + \dots \quad (5)$$

Подставляя (5) в (1) и приравнивая величины при одинаковых степенях k , имеем уравнения:

$$\frac{\partial^2 P_0}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 P_0}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_0}{\partial r} = \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 P_0}{\partial t^2} \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_1}{\partial r} = \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} + a_1 z \frac{\partial^2 P_0}{\partial t^2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_2}{\partial r} = \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2} + a_1 z \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} + a_2 z^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial t^2} \quad (8)$$

.....

Введем в уравнения (6), (7), (8) изображения по Лапласу P_0, P_1, P_2 . Решение уравнения (6) при поставленных граничных условиях можно искать методом неполного разделения переменных ⁽²⁾

$$P_0 = \int_0^\infty A(\lambda) e^{-\sqrt{\frac{p^2}{a_0^2} + \lambda^2} z} I_0(\lambda r) d\lambda, \quad (9)$$

где $P_0 = \int_0^\infty e^{-pt} P_0 dt$.

$A(\lambda)$ находится из граничных условий на поверхности (2).

Решение уравнения (7), при нулевых граничных условиях, ищем:

$$P_1 = \int_0^\infty A(\lambda) Z(z) I_0(\lambda r) d\lambda. \quad (10)$$

Подставляя (10) и (9) в (7) получим:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty A(\lambda) \left[Z''(z) - \left(\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2} \right) Z(z) \right] I_0(\lambda r) d\lambda = \\ = a_1 z p^2 \int_0^\infty A(\lambda) e^{-\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}} z} I_0(\lambda r) d\lambda. \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда получим уравнение $Z(z)$

$$Z''(z) - \left(\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2} \right) Z(z) = a_1 z p^2 e^{-\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}} z}. \quad (12)$$

Решение уравнения (12) при нулевых условиях найдется

$$\begin{cases} Z(z) = (C_0 z + C_1 z^2) e^{-\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}} z} \\ C_0 = -\frac{a_1 p^2}{4 \left(\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2} \right)}; \quad C_1 = -\frac{a_1 p^2}{4 \sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}}}. \end{cases} \quad (13)$$

Если подставить (13) в (10) получим

$$4P_1 = \int_0^\infty A(\lambda) I_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}} z} \left(-\frac{a_1 p^2}{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}} z - \frac{a_1 p^2}{\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}}} z^2 \right) d\lambda$$

Последнее выражение можно свести к P_0 , если учесть, что деление на $-\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}}$ соответствует интегрированию $e^{-\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}} z}$ по z

$$P_1 = \frac{a_1}{4} z^2 \int_0^\infty p^2 P_0 dz - z \frac{a_1}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty p^2 P_0 dz dz. \quad (14)$$

Или переходя к исходным функциям

$$P_1 = \frac{a_1}{4} z^2 \int_0^\infty \frac{\partial^2 P_0}{\partial t^2} dz - \frac{a_1}{4} z \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial^2 P_0}{\partial t^2} dz dz. \quad (15)$$

Рассмотрим простейший случай $R'(t) = V_0 = a_0$; $P_1 = \text{const} = \bar{P}_1$. Тогда (4) имеем: $P_0 = \bar{P}_1 \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a_0^2 t^2 - r^2}} \right)$. Подставляя это выражение в (15), получим:

$$\frac{P_1}{\frac{a_1}{4} \bar{P}_1} = -\frac{a_0^2}{3} \frac{r_0^2 + 2a_0^2 t^2}{(a_0^2 t^2 - r_0^2)^{3/2}} z^3 - \frac{a_0^2}{3} \frac{a_0^2 t^2 - r_0^2}{(a_0^2 t^2 - r_0^2)^{3/2}} z. \quad (16)$$

В случае переменной $R'(t)$ и $P_1(r, t) = P_\Phi(R)$ можно получить просто давление вдоль Oz (5):

$$P_0 = -a_0 \frac{\partial}{\partial z} \int_{t_0}^{t - \frac{z}{a_0}} P_\Phi(t') dt'.$$

Здесь P_Φ давление во фронте на границе:

$$R(t_*) = \sqrt{a_0^2 (t_* - t)^2 - z^2}$$

Подставляя в (15), имеем после простых вычислений вдоль оси Oz :

$$\frac{P_1}{\frac{a_1}{4} a_0} = -z^2 L(z, t) + z \int_{a_0 t}^z L(z, t) dz, \quad (17)$$

где

$$L(z, t) = \left[P_\Phi \left(t - \frac{z}{a_0} \right) - \left(\frac{\partial t^*}{\partial t} \right)^2 P_\Phi'(t^*) - P_\Phi(t_*) \frac{\partial^2 t_*}{\partial t^2} \right].$$

Решение для изображения P_2 из (8) ищем в виде:

$$P_2 = \int_0^\infty A(\lambda) I_0(\lambda r) Z_1(z) d\lambda. \quad (18)$$

Подставляя (18), (10) и (9) в (8) получим

$$Z_1(z) - \left(\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2} \right) Z_1(z) = a_1 z p^2 Z(z) + a_2 z^2 p^2 e^{-\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}} z}. \quad (19)$$

Решение (19) при нулевых условиях запишется:

$$\left\{ \begin{aligned} Z_1(z) &= (B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + B_4 z^4) e^{-\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}} z} \\ B_3 &= + \frac{1}{3} \left(\frac{a_1}{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}} p^2 C_1 + \frac{4}{3} \frac{a_1 p^2 C_0}{\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}}} \frac{8a_2}{\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}}} - \frac{p^2}{12} \right) \\ B_1 &= \frac{3}{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}} \frac{B_3}{2}; \quad B_2 = - \frac{3B_3}{2\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}}}; \quad B_4 = - \frac{\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}}}{8} B_3 - \\ &\quad - \frac{a_1 p^2 C_1}{8\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}}}. \end{aligned} \right. \quad (20)$$

Если подставить (20) в (18) и заменить деление на $-\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}}$

интегрированием $e^{-\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}} z}$ по z , а умножения на p дифференцированием по t , можно столь же просто получить выражение для P_2 , аналогичное (16) или (17). Остальные члены разложения $P_3, P_4, \dots$ найдутся приведенным единым методом, только выражения $Z_n(z)$, соответствующие (13) и (20), будут содержать все большее количество степеней и будут несколько длиннее. Однако дополнительных трудностей в вычислениях не будет.

В случае переменной с глубиной плотности приведенный метод также полностью применим.

Этот метод дает лучшие результаты, чем, например, метод разделения переменных в уравнении (1) или методы, близкие к методу Адамара (3).

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Հեղուկի մեջ ճնշման ուղղման հոր եղանակ

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է ճնշման տարածումը ոչ համասեռ սեղմվող հեղուկով զրազված կիսատարածությունների մեջ: Այս խնդրի լուծման հայտնի մեթոդները (փոփոակաանների տեմիջական անջատումը կամ Աղամարի մեթոդը) թույլ են տալիս գտնել էֆեկտիվ լուծումներ, միայն ալիքի ճակատի մոտ: Տվյալ աշխատանքում առաջարկվում է կիսատարածությունների մեջ ճնշման դաշտի որոշման էֆեկտիվ մեթոդ, որոնքի ֆունկցիան k պարամետրի աստիճաններով վերածելու միջոցով, որտեղ k -ն բնորոշում է հեղուկի անհամասեռությունը: Մասնավոր դեպքերում ստացված է պարզ բանաձևեր:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Л. Д. Ландау и Е. М. Лившиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1954.
² А. Г. Багдоев, Проникание давления в сжимаемую жидкость, Вестник МГУ № 10, 1956. ³ J. Hadamard, Le problème de Cauchy, Paris, 1932. ⁴ А. Г. Багдоев, Кандидатская диссертация, МГУ. ⁵ А. Г. Багдоев, Исследование задачи о проникании давления, Вестник МГУ, 1956.