ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXIX 1959 4

МАТЕМАТИКА

А. А. Гольдберг

Элементарные замечания о формулах для определения порядка и типа целых функций многих переменных

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 30.III.1959)

В последнее время различные авторы публиковали результаты, посвященные перенесению на случай целых функций многих комплексных переменных известных формул, позволяющих определить порядок и тип целой функции одной переменной по ее тейлоровским коэффициентам. Так как исчерпывать пространство n комплексных переменных можно различными способами, то, естественно, в зависимости от принятого определения порядка и типа для них получались различные формулы. Целью настоящей заметки является обратить внимание на то, что ряд известных формул можно получить единым совершенно простым приемом, при этом получается некоторое обобщение известных результатов.

Пусть $\overline{G}_r$ — семейство замкнутых поликруговых областей в пространстве $(z_1, \cdots, z_n)$, зависящее от параметра $r > 0$ и обладающее тем свойством, что $(z_1, \cdots, z_n) \in \overline{G}_r$ тогда и только тогда, когда $(z_1/r, \cdots, z_n/r) \in \overline{G}_1$.

Пусть

$$f(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{k_1, \cdots, k_n = 0}^{\infty} a_{k_1 \cdots k_n} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$$

целая функция. Обозначим

$$M_G(r) = M_G(r, f) = \max_{(z_1, \cdots, z_n) \in \overline{G}_r} |f(z_1, \cdots, z_n)|.$$

G—порядком и G—типом $f(z_1, \cdots, z_n)$ будем называть соответственно

$$\rho_G = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M_G(r)}{\ln r} \quad \text{и} \quad \sigma_G = \overline{\lim_{r\to\infty}} \ln M_G(r)/r^{\rho_G}.$$

Обозначим

$$\Phi_G(k_1, \cdots, k_n) = \max_{(z_1, \cdots, z_n) \in G_1} |z_1|^{k_1} \cdots |z_n|^{k_n}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Все порядки* ρ_G *равны и* $\rho = \rho_G$ *может быть вычислено по формуле*

$$\rho = \overline{\lim_{k_1 + \cdots + k_n \to \infty}} \frac{(k_1 + \cdots + k_n) \ln (k_1 + \cdots + k_n)}{-\ln |a k_1 \cdots k_n|}. \quad (1)$$

G—типы σ_G *удовлетворяют соотношению*

$$(e\rho\sigma_G)^{\frac{1}{\rho}} = \overline{\lim_{k_1 + \cdots + k_n \to \infty}} \left\{ (k_1 + \cdots + k_n)^{\frac{1}{\rho}} \left[\Phi_G(k_1, \cdots, k_n) |a_{k_1 \ldots k_n}|\right]^{\frac{1}{k_1 + \cdots + k_n}} \right\}. \quad (2)$$

Формула (1) встречается по существу уже у Э. Бореля ([1]), а в применении к целым функциям комплексных аргументов—у Ж. Сира ([2]), где рассматривалось исчерпание по полицилиндрам $Z_r = \{|z_1| \leqslant r_1, \cdots, |z_n| \leqslant r\}$. То, что $\rho_G = \rho$ для всех G_r, конечно, очевидно, но мы приводим формулу (1) как для полноты, так и потому, что этот факт ускользнул от внимания А. А. Темлякова ([3]) и С. А. Ерёмина ([4]), которые рассматривали случаи $\bar{G}_r = C_r = \{|z_1| + \cdots + |z_n| \leqslant r\}$ и $\bar{G}_r = \bar{Z}_r$*.

Доказательство теоремы использует ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть* $\Phi(r) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k r^k$, $A_k \geqslant 0$, $\sqrt[k]{A_k} \to 0$, *и некоторая функция* $\Psi(r)$, $r \in [a, \infty)$, *удовлетворяет неравенству*

$$\max_{0 < k < \infty} A_k r^k \leqslant \Psi(r) \leqslant \Phi(r). \quad (3)$$

Тогда функции $\Psi(r)$ и $\Phi(r)$ *имеют одинаковые порядок и тип.*

Доказательство этой леммы в неявной форме содержится в обычном выводе формул для определения порядка и типа целой функции одной переменной (А. И. Маркушевич ([6]), гл. VII, § 1).

Лемма 2. *Функции* $\Phi(r) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k r^k$, $A_k \geqslant 0$, $\sqrt[k]{A_k} \to 0$ и

---

* У А. А. Темлякова ([3]) формула для ρ_C имеет более сложный вид, так как там не было использовано, что

$$\lim_{k_1 + \cdots + k_n \to \infty} \ln (k_1^{k_1} \cdots k_n^{k_n}) [(k_1 + \cdots + k_n) \ln (k_1 + \cdots + k_n)]^{-1} = 1.$$

В таком усложненном виде формула применялась в работах других авторов (С. А. Ерёмин ([4]), М. М. Джрбашян ([5])).

$\Phi_1(r) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k B_k r^k$, $B_k > 0$, $\sqrt[k]{B_k} \to 1$, *имеют одинаковый порядок и тип.*

Это сразу следует из известных формул для определения порядка и типа.

Лемма 3. *Пусть* $P(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{k_1 + \cdots + k_n = k} a_{k_1 \cdots k_n} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$ *— многочлен степени* k, $M_G(1, P) = \max_{(z_1, \cdots, z_n) \in G_1} |P(z_1, \cdots, z_n)|$.

Тогда

$$1 \leq M_G(1, P) / \max_{k_1 + \cdots + k_n = k} \{|a_{k_1 \cdots k_n}| \Phi_G(k_1, \cdots, k_n)\} \leq (k+1)^n. \quad (4)$$

Действительно, правая сторона неравенства очевидна. Пусть $\Phi_G(k_1, \cdots, k_n) = |\zeta_1|^{k_1} \cdots |\zeta_n|^{k_n}$, где $(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \overline{G}_1$. Левую сторону неравенства получим, если для $P(z_1, \cdots, z_n)$ запишем неравенство Коши в полицилиндре $\{|z_1| < |\zeta_1|, \cdots, |z_n| < |\zeta_n|\}$ и заметим, что максимум $|P(z_1, \cdots, z_n)|$ в этом полицилиндре достигается на его остове, следовательно, в точке из $\overline{G}_1$ ($\overline{G}_1$—поликруговая область) и не превышает поэтому $M_G(1, P)$.

Теперь доказательство теоремы получается сразу. Пусть t — новое комплексное переменное, $\zeta_i = z_i / t$, $i = 1, \cdots, n$, $f(z_1, \cdots, z_n) = f(\zeta_1 t, \cdots, \zeta_n t) = F(t, \zeta_1, \cdots, \zeta_n)$. Очевидно, что

$$M_G(r, f) = \max_{(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \overline{G}_1, |t| = r} |F(t, \zeta_1, \cdots, \zeta_n)|.$$

Но

$$F(t, \zeta_1, \cdots, \zeta_n) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) t^k,$$

$$P_k(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) = \sum_{k_1 + \cdots + k_n = k} a_{k_1 \cdots k_n} \zeta_1^{k_1} \cdots \zeta_n^{k_n}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\max_{0 \leq k < \infty} M_G(1, P_k) r^k \leq M_G(r, f) \leq \sum_{k=1}^{\infty} M_G(1, P_k) r^k = \Phi(r).$$

Левая сторона получается, если к $F(t, \overline{\zeta}_1, \cdots, \overline{\zeta}_n)$, где $(\overline{\zeta}_1, \cdots, \overline{\zeta}_n)$ — точка на $\overline{G}_1$, в которой достигается $r^k \max_{G_1} |P_{k_0}(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)| = r^{k_0} M_G(1, P_{k_0}) = \max_{0 \leq k < \infty} r^k M_G(1, P_k)$ применить неравенство Коши в круге $|t| \leq r$ как к целой функции от одной переменной t. Правая сторона неравенства очевидна. По лемме 1 порядок (тип) $M_G(r, f)$ равен соответственно порядку (типу) $\Phi(r)$, а этот в свою очередь равен порядку (типу)

$$\Phi_1(r)=\sum_{k=0}^{\infty} r^k \max_{k_1+\cdots+k_n=k}\{|a_{k_1\ldots k_n}|\Phi_G(k_1,\cdots,k_n)\}$$

что следует из леммы 2 и оценки (4): $(k+1)^{-n}\leqslant B_k\leqslant 1, \sqrt[k]{B_k}\to 1$. Используя формулы для определения порядка и типа $\Phi_1(r)$, получим для ρ_G формулу

$$\rho_G=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{k\ln k}{-\ln\left(\max\limits_{k_1+\cdots+k_n=k}(|a_{k_1\ldots k_n}|\Phi_G(k_1,\cdots,k_n))\right)}=$$

$$=\overline{\lim_{k_1+\cdots+k_n\to\infty}}\frac{(k_1+\cdots+k_n)\ln(k_1+\cdots+k_n)}{-\ln(|a_{k_1\ldots k_n}|\Phi_G(k_1,\cdots,k_n))} \qquad (1')$$

и для σ_G формулу (2) с $\rho=\rho_G$. Остается показать, что для всех исчерпаний G_r $\rho_G=\rho$. G_1, как ограниченная область, содержится в некотором полицилиндре $\overline{Z}_L=\{|z_i|\leqslant L\}$. Возьмем точку $(z_1,\cdots,z_n)\in G_1$ такую, что $l=\min\limits_{n\geqslant i\geqslant 1}|z_i|>0$, существование такой точки очевидно. Обозначим $\overline{Z}_l$ полицилиндр $\{|z_i|\leqslant l\}$, $i=1,\cdots,n$. Так как максимум $|f|$ достигается на остове полицилиндра, то $M_{Z_l}(1,f)\leqslant M_G(1,f)$ и, очевидно, $M_G(1,f)\leqslant M_{Z_L}(1,f)$. Отсюда сразу следует, что $M_{Z_1}(lr,f)=M_{Z_l}(r,f)\leqslant M_G(r,f)\leqslant M_{Z_L}(r,f)=M_{Z_1}(Lr,f)$. Так как порядки $M_{Z_1}(Lr,f)$ и $M_{Z_1}(lr,f)$ одинаковы и равны порядку $M_{Z_1}(r,f)$, то доказано, что для всех G_r $\rho_G=\rho$. Чтобы получить формулу (1), остается заметить, что для $\overline{Z}_1$: $\{|z_1|\leqslant 1,\cdots,|z_n|\leqslant 1\}$ $\Phi_{Z_1}(k_1,\cdots,k_n)\equiv 1$. Теорема доказана.

Примеры. При исчерпании $G_r=Z_r$ $\Phi_z(k_1,\cdots,k_n)\equiv 1$ (ср. [4]); при $G_r=C_r$ $\Phi_c(k_1,\cdots,k_n)=k_1^{k_1}\cdots k_n^{k_n}(k_1+\cdots+k_n)^{-(k_1+\cdots+k_n)}$ (ср. [3]); при $G_r=\overline{S}_r=\{\sqrt{|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2}\leqslant r\}$ $\Phi_s(k_1,\cdots,k_n)=$ $=\sqrt{k_1^{k_1}\cdots k_n^{k_n}(k_1+\cdots+k_n)^{-(k_1+\cdots+k_n)}}$; при G_r: $\{(|z_1|/r)^{p_1}+\cdots+(|z_n|/r)^{p_n}\leqslant 1\}$, $p_i>0$, $i=1,\cdots,n$, (этот класс исчерпаний содержит как частные случаи оба предшествовавшие)

$$\Phi_G(k_1,\cdots,k_n)=\left(\frac{k_1}{p_1}\right)^{\frac{k_1}{p_1}}\cdots\left(\frac{k_n}{p_n}\right)^{\frac{k_n}{p_n}}\left(\frac{k_1}{p_1}+\cdots+\frac{k_n}{p_n}\right)^{-\left(\frac{k_1}{p_n}+\cdots+\frac{k_n}{p_n}\right)}.$$

(всюду $0^0=1$).

Часто бывает полезным характеризовать рост целой функции многих комплексных переменных системой типов $\{\sigma^{(\lambda)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\}$, где $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$—целые числа $\geqslant 0$ такие, что $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=\lambda$. Определение системы типов в наших обозначениях можно выразить так. Обозначим T_r поликруговую замкнутую область

$$\overline{T}_r=\left\{\left[\sum_{\lambda_1+\cdots+\lambda_n=\lambda}\sigma^{(\lambda)}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}|z_1|^{\lambda_1}\cdots|z_n|^{\lambda_n}\right]^{\frac{1}{\lambda}}\leqslant r\right\},$$

$\sigma^{(1)}_{\lambda_1\dots\lambda_n} > 0$. Система $\{\sigma^{(1)}_{\lambda_1\dots\lambda_n}\}$ называется системой нормальных типов $f(z_1,\dots,z_n)$, если при таких коэффициентах в T, $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \ln M_T(r,f)/r^\rho = 1$. Если при любом выборе $\sigma^{(1)}_{\lambda_1\dots\lambda_n}>0$ $\ln M_T(r,f)/r^\rho \to 0$, то f имеет минимальный тип, если $\overline{\lim}\ln M_T(r,f)/r^\rho=\infty$, то — максимальный тип*. Системы нормальных типов, рассматриваемые как точки в некотором конечномерном действительном пространстве, образуют некоторую гиперповерхность, уравнение которой с помощью формулы (2) запишется

$$(e\rho)^{\frac{1}{\rho}} = \overline{\lim_{k_1+\dots+k_n\to\infty}} (k_1+\dots+k_n)^{\frac{1}{\rho}}\left[|a_{k_1\dots k_n}|\Phi_T(k_1,\dots k_n)\right]^{\frac{1}{k_1+\dots+k_n}}.$$

Неизвестные $\sigma^{(1)}_{\lambda_1\dots\lambda_n}$ входят в $\Phi_T(k_1,\dots,k_n)$, например, в случае $\lambda=1$ $\Phi_T(k_1,\dots,k_n) = k_1^{k_1}\cdots k_n^{k_n}\cdot[\sigma_1^{k_1}\cdots\sigma_n^{k_n}(k_1+\dots+k_n)^{k_1+\dots+k_n}]^{-1}$, $\sigma_i=\sigma^{(1)}_{\lambda_i}$, где $\lambda_j=0$ при $j\neq i$ и $\lambda_i=1$.

Укажем еще на одно применение указанного выше приема. Пусть исчерпание $(z_1,\dots,z_n)$—пространства производится по замкнутым поликруговым областям $\bar{D}_r=\bar{D}_r(\rho_1,\dots,\rho_n)$: $|z_1|^{\rho_1}+\dots+|z_n|^{\rho_n}\le r$, $\rho_i>0$, $i=1,\dots,n$. Покажем справедливость следующей формулы:

$$\rho=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\ln M_D(r,f)}{\ln r}=$$

$$=\overline{\lim_{k_1+\dots+k_n\to\infty}}\frac{\left(\frac{k_1}{\rho_1}+\dots+\frac{k_n}{\rho_n}\right)\ln(k_1+\dots k_n)}{-\ln|a_{k_1\dots k_n}|}. \quad (5)$$

Пусть сначала все $\rho_1,\dots,\rho_n$—рациональные числа, q—общий наименьший знаменатель $1/\rho_1,\dots,1/\rho_n$. Тогда $\rho_i=q/p_i$, $i=1,\dots,n$. Произведем подстановку $z_i=\zeta_i t^{p_i}$, $f(z_1,\dots,z_n)=f(\zeta_1 t^{p_1},\dots,\zeta_n t^{p_n})=F(t,\zeta_1,\dots,\zeta_n)$. Очевидно, что

$$\max_{(z_1,\dots,z_n)\in\bar{D}_r}|f(z_1,\dots,z_n)|=\max_{|t|=r^{1/q},(\zeta_1,\dots,\zeta_n)\in\bar{D}_1}|F(t,\zeta_1,\dots,\zeta_n)|=$$

$$=M(r^{1/q},\bar{D}_1;F),$$

где $\bar{D}_1$: $\{|\zeta_1|^{\rho_1}+\dots+|\zeta_n|^{\rho_n}\le 1\}$. Поэтому

$$\rho=\frac{1}{q}\overline{\lim_{r\to\infty}}\ln\ln M(r,\bar{D}_1;F)/\ln r.$$

Но

$$F(t,\zeta_1,\dots,\zeta_n)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(\zeta_1,\dots,\zeta_n)t^k,$$

$$A_k(\zeta_1,\dots,\zeta_n)=\sum_{p_1k_1+\dots+p_nk_n=k}a_{k_1\dots k_n}\zeta_1^{k_1}\dots\zeta_n^{k_n}.$$

* Такое определение нормальных типов при $\lambda>1$ сообщил мне Л. И. Ронкин.

Те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1 (лишь в лемме 3 слова „многочлен степени k" надо заменить на „многочлен степени не выше k"), приводят к формуле (5):

$$\rho = \frac{1}{q}\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{k\ln k}{-\ln\left(\max\limits_{p_1k_1+\cdots+p_nk_n=k}\{|a_{k_1\cdots k_n}|\Phi_{D_1}(k_1,\cdots,k_n)\}\right)} =$$

$$= \overline{\lim_{k_1+\cdots+k_n\to\infty}}\frac{\left(\frac{p_1}{q}k_1+\cdots+\frac{p_n}{q}k_n\right)\ln(p_1k_1+\cdots+p_nk_n)}{-\ln(|a_{k_1\cdots k_n}|\Phi_{D_1}(k_1,\cdots,k_n))} =$$

$$= \overline{\lim_{k_1+\cdots+k_n\to\infty}}\frac{(k_1/\rho_1+\cdots+k_n/\rho_n)\ln(k_1+\cdots+k_n)}{-\ln|a_{k_1\cdots k_n}|}.$$

Так как при $0<\varepsilon<1$

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^{\rho_i(1\pm\varepsilon)}\right)\leqslant(1+\varepsilon)\ln\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^{\rho_i}\right)+\ln 2n,$$

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^{\rho_i/(1\pm\varepsilon)}\right)\geqslant(1+\varepsilon)^{-1}\ln\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^{\rho_i}\right)-\ln 2n$$

(верхний знак берем, если $|z_i|>1$, нижний – если $|z_i|<1$) и

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}|z_i|^{\rho_i(1\pm\varepsilon)}<r\right\}\subset\left\{\sum_{i=1}^{n}|z_i|^{\rho_i}<r\right\}\subset\left\{\sum_{i=1}^{n}|z_i|^{\rho_i/(1\pm\varepsilon)}<r\right\},$$

то $\rho=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\ln\ln M_D(r,f)/\ln r$ непрерывно зависит от $(\rho_1,\cdots,\rho_n)$. Поэтому формула (5) справедлива не только для рациональных, но и для произвольных положительных $\rho_1,\cdots,\rho_n$.

Систему $(\rho_1,\cdots,\rho_n)$ назовем системой положительных порядков $f(z_1,\cdots,z_n)$, если при таком выборе $\rho_1,\cdots,\rho_n$ $\rho=1$, т. е. если

$$\overline{\lim_{r_1+\cdots+r_n\to\infty}}\frac{\ln\ln M(r_1,\cdots,r_n;f)}{\ln(r_1^{\rho_1}+\cdots+r_n^{\rho_n})}=1, \tag{6}$$

где $M(r_1,\cdots,r_n;f)=\max\limits_{\substack{|z_i|=r_i\\ i=1,\cdots,n}}|f(z_1,\cdots,z_n)|$. Если при любых положительных $\rho_1,\cdots,\rho_n$ этот предел равен нулю, то скажем, что f имеет общий нулевой порядок, если он равен ∞, то f — бесконечного порядка. Из (5) сразу следует

Теорема 2. *Если $f(z_1,\cdots,z_n)$ имеет систему положительных порядков $(\rho_1,\cdots,\rho_n)$, то*

$$\overline{\lim_{k_1+\cdots+k_n\to\infty}}\frac{(k_1/\rho_1+\cdots+k_n/\rho_n)\ln(k_1+\cdots+k_n)}{-\ln|a_{k_1\cdots k_n}|}=1. \tag{7}$$

Формула (7) была получена М. М. Джрбашяном (⁷) для собственного подкласса целых функций конечного порядка—класса A, т. е. для функций, для которых помимо (7) выполняется

$$\overline{\lim_{r_i\to\infty}}\ \ln\ln M(1,\cdots,1,r_i,1,\cdots,1)/\ln r_i=\rho_i,\quad i=1,\cdots,n^{*}. \qquad (8)$$

В заключение приведем один пример. $f(z_1, z_2)=e^{z_1z_2}$ удовлетворяет условиям (8) при $\rho_1=\rho_2=1$, но тогда не выполняется условие (6), результат М. М. Джрбашяна не применим. На основании же теоремы 2 легко найти все системы положительных порядков (ρ_1, ρ_2). Для нашей функции $a_{k_1k_2}=0$ при $k_1\neq k_2$ и $a_{k,k}=1/k!$ при $k_1=k_2=k$. По формуле (7) получаем $1=1/\rho_1+1/\rho_2$. Любые два числа $\rho_1>0$ и $\rho_2>0$, удовлетворяющие этому условию, образуют систему положительных порядков (ρ_1, ρ_2).

Ужгородский государственный университет

Ա. Ա. ԳՈԼԴԲԵՐԳ

Տարրական դիտողություններ շատ փոփոխականների ամբողջ ֆունկցիաների կարգի և տիպի որոշման բանաձևերի մասին

Պարզ և միօրինակ եղանակով շատ կոմպլեքս փոփոխականների տարածության դանազան ձևով սպառելու դեպքում ստացված են բանաձևեր, որոնց մասին խոսվում է հոդվածի վերնագրում։ Մի շարք բանաձևեր (3, 4, 7) ստացվում են որպես հոդվածում ապացուցված թեորեմների մասնավոր դեպքեր։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *E. Borel,* Leçons sur les séries à termes positifs, Paris, 1902, ch. VI. [2] *J. Sire,* Sur les fonctions entières de deux variables d'ordre apparent total fini, Rendiconti Circolo mat. Palermo, 31 (1911), 1—91. [3] *А. А. Темляков,* Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, Труды кафедр мат., 20 (1954), 7—16. [4] *С. А. Еремин,* Укр. мат. журнал, 9 (1957), 30—43. [5] *М. М. Джрбашян,* Мат. сб., 41 (1957), 257—276. [6] *А. И. Маркушевич,* Теория аналитических функций, М.—Л., 1950. [7] *М. М. Джрбашян,* Изв. АН АрмССР, физ.-матем., ест. и техн. н., 8, № 4 (1955), 1—23. [8] *G. Valiron,* Sur un théorème de M. Hadamard, Bull. sci. math., 47 (1923), 177—192.

---

* Условия (8) записаны в (⁷) в более сложной форме, но их можно упростить, использовав результат Ж. Сира (²) (см. также Ж. Валирон (⁸)).