

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

С. С. Дарбинян

Сдвиговые колебания системы с двумя степенями свободы
 с учетом упруго-пластических деформаций

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 25.V.1959)

В работе рассматриваются сдвиговые колебания системы с двумя степенями свободы с учетом упруго-пластических деформаций (фиг. 1).

Принимается, что упруго-пластические свойства данной системы характеризуются диаграммой зависимости напряжений от деформаций, представленной на фиг. 2 (1,2).

Согласно этой диаграмме зависимость между напряжением и деформацией выражается следующими уравнениями:

$$\tau = G [(1 - \lambda) \gamma + \lambda \gamma_T] \quad (\text{при нагружении}),$$

$$\tau = G |\gamma - \lambda (\gamma_{\max} - \gamma_T)| \quad (\text{при разгрузении}),$$

где λ — коэффициент упрочнения материала, а G — модуль упругости при сдвиге.

При рассматриваемых зависимостях возможны следующие случаи деформированных состояний (фиг. 1).

Случай I. В обоих участках системы имеют место упругие колебания.

Случай II. Первый участок находится в упруго-пластической стадии работы, а второй — в упругой стадии.

При этом может быть, что:

- 1) первый участок находится в зоне нагружения;
- 2) первый участок находится в зоне разгружения.

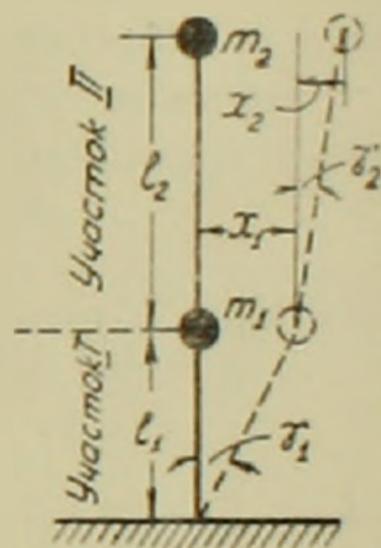
Случай III. Первый участок находится в упругой стадии работы, а второй — в упруго-пластической стадии. При этом возможно, что:

- 1) второй участок находится в зоне нагружения;
- 2) второй участок находится в зоне разгружения.

Случай IV. В обоих участках системы имеют место упруго-пластические деформации.

При этом возможны следующие варианты:

- 1) оба участка находятся в зоне нагружения;



Фиг. 1.

2) оба участка находятся в зоне разгрузки;

3) первый участок находится в зоне нагружения, а второй — в зоне разгрузки;

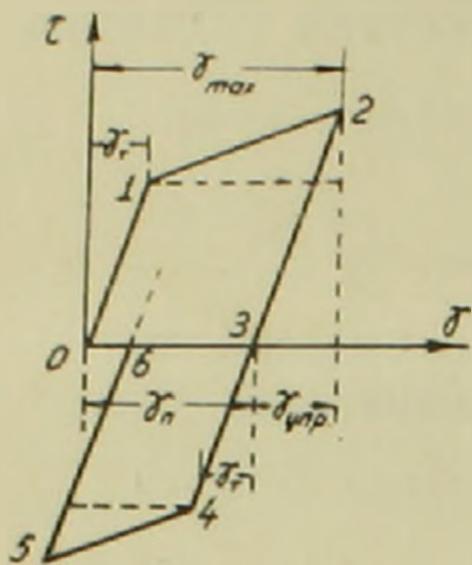
4) второй участок находится в зоне нагружения, а первый — в зоне разгрузки.

Будем считать, что на массы m_1 и m_2 действуют внешние силы $P_1(t)$ и $P_2(t)$, под действием которых система претерпевает сдвиговые колебания.

Дифференциальные уравнения движения рассматриваемой системы запишутся следующим образом:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c_1 x_1 - c_2 x_2 = P_1(t) + \mu_1, \quad (1)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + c_2 x_2 = P_2(t) + \mu_2,$$



Фиг. 2.

где

$$\lambda_i = l_i \gamma_i \quad (i = 1, 2).$$

Величины c_1 , c_2 , μ_1 и μ_2 , входящие в (1), принимают различные значения в стадии упруго-пластического нагружения и разгрузки (для разных случаев деформированных состояний), поэтому интегрирование уравнений (1) осуществляется по участкам диаграммы, показанной на фиг. 2 (3), при соблюдении условий сопряжения перемещений и скоростей на границе этих участков.

Значения этих величин для всевозможных случаев деформированных состояний приведены в табл. 1.

Таблица 1

Варианты	Случай I	Случай II	Случай III	Случай IV
1	$c_1 = k_1$ $c_2 = k_2$ $\mu_1 = \mu_2 = 0$	$c_1 = k_1(1 - \lambda)$ $c_2 = k_2$ $\mu_1 = -\lambda k_1 x_{1T}$ $\mu_2 = 0$	$c_1 = k_1$ $c_2 = k_2(1 - \lambda)$ $\mu_1 = -\mu_2 = k_2 \lambda x_{2T}$	$c_1 = k_1(1 - \lambda)$ $c_2 = k_2(1 - \lambda)$ $\mu_1 = -\lambda k_1 x_{1T} - \mu_2$ $\mu_2 = -\lambda k_2 x_{2T}$
2		$c_1 = k_1, c_2 = k_2$ $\mu_1 = k_1 x_{1n}, \mu_2 = 0$	$c_1 = k_1, c_2 = k_2$ $\mu_1 = -\mu_2 = -k_2 x_{2n}$	$c_1 = k_1, c_2 = k_2$ $\mu_1 = k_1 x_{1n} - \mu_2$ $\mu_2 = k_2 x_{2n}$
3				$c_1 = k_1(1 - \lambda)$ $c_2 = k_2$ $\mu_1 = -\lambda k_1 x_{1T} - \mu_2$ $\mu_2 = k_2 x_{2n}$
4				$c_1 = k_1$ $c_2 = k_2(1 - \lambda)$ $\mu_1 = k_1 x_{1n} - \mu_2$ $\mu_2 = -\lambda k_2 x_{2T}$

где

$$k_i = \frac{GF_i}{l_i}, \quad x_{iT} = l_i \gamma_{iT}, \quad x_{in} = \lambda(x_{imax} - x_{iT}), \quad (i = 1, 2),$$

$x_{i\max}$ — максимальные смещения первой и второй масс.

Решение однородных уравнений, соответствующих (1), представим в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(\omega t + \varphi), \\ x_2 &= A_2 \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим уравнение частот, решение которого дает:

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}} \quad (3)$$

На основании (3) решение (2) запишется так:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \\ x_2 &= A_{21} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{22} \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициенты A_{21} и A_{22} определяются по формулам, полученным из уравнений частот (4):

$$\beta_1 = \frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{c_1 - m_1 \omega_1^2}{c_2}, \quad \beta_2 = \frac{A_{22}}{A_{12}} = \frac{c_1 - m_1 \omega_2^2}{c_2} \quad (5)$$

Частные решения дифференциальных уравнений (1) ищем в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \sin \nu t + d_1, \\ x_2 &= a_2 \sin \nu t + d_2, \end{aligned} \quad (6)$$

при этом предполагаем, что внешние силы $P_1(t)$ и $P_2(t)$ изменяются по гармоническому закону с одной и той же частотой:

$$P_1(t) = b_1 \sin \nu t, \quad P_2(t) = b_2 \sin \nu t. \quad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в (1), получим систему уравнений, решение которых дает:

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{P_2}{c_2}, \quad d_1 = \frac{P_1 + P_2}{c_1}, \\ a_1 &= \frac{b_1(-m_2 \nu^2 - c_2) + b_2 c_2}{(-m_1 \nu^2 + c_1)(-m_2 \nu^2 + c_2) - m_2 c_2 \nu^2}, \\ a_2 &= \frac{b_2(-m_1 \nu^2 + c_1) + m_2 b_1 \nu^2}{(-m_1 \nu^2 + c_1)(-m_2 \nu^2 + c_2) - m_2 c_2 \nu^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, общие решения дифференциальных уравнений движения (1) запишутся следующим образом:

$$x_1 = A_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + a_1 \sin \nu t + \frac{P_1 + P_2}{c_1}, \quad (8)$$

$$x_2 = A_{11} \beta_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \beta_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + a_2 \sin \nu t + \frac{P_2}{c_2}.$$

Входящие в (9) произвольные постоянные A_{11} , A_{12} , φ_1 и φ_2 определяются начальными условиями или условиями сопряжения (условия непрерывности перемещений и скоростей в точках 1, 2, 3 и т. д.).

Величины ω_1 , ω_2 , β_1 , β_2 , a_1 и a_2 определяются по формулам (3), (5) и (8).

После того как перемещение дойдет до точки 3 (фиг. 2), ее можем принимать за новое начало отчета движения и составить аналогичные дифференциальные уравнения для следующих стадий движения (зоны 3—4, 4—5 и т. д.).

Из (3) нетрудно заметить, что величины ω_1 и ω_2 при наличии упруго-пластических деформаций меньше соответствующих их значений при упругих колебаниях.

Следует отметить, что полученные результаты можно приложить также к вопросам сейсмостойкости; для этого следует принимать

$$P_1(t) = -m_1 \frac{d^2 x_0}{dt^2}, \quad P_2(t) = -m_2 \frac{d^2 x_0}{dt^2},$$

где x_0 — закон колебания почвы.

Институт строительных материалов и сооружений

Ս. Ս. ԴԱՐԲԻՆՅԱՆ

Ազատության երկու աստիճան ունեցող սխտեմի սահմանային հարթա-պլաստիկական դեֆորմացիաների հաշվառումով

Հոդվածում ուսումնասիրվում է ազատության երկու աստիճան ունեցող սխտեմի սահմանային հարթա-պլաստիկական դեֆորմացիաների հաշվառումով: Դեֆորմացիաների և լարումների միջև եղած կապը բնորոշվում է ըստ զԺ. Չ պասկերված դիսկրամայի:

Առաձգա-պլաստիկական դեֆորմացիաների բոլոր հնարավոր դեպքերի համար տրված են շարժման դիֆերենցիալ (1) հավասարումները, որոնց մեջ մտնող գործակիցների արժեքները տարրեր դեպքերի համար բերվում են 1 աղյուսակում:

Շարժման (1) դիֆերենցիալ հավասարումների ինտեգրումը իրականացվում է շարժման տարրեր էտապների (զԺ. 2) համար առանձին-առանձին տեղափոխումների և արագությունների անխզելիության պայմանների օգտագործումով:

(1) հավասարումների ընդհանուր լուծումները արված են (9) բանաձևերի միջոցով: Ատացված արդյունքները կարելի է կիրառել նաև սեյսմոկայունությունից հարցերում:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ В. В. Москвитин, Изв. АН СССР, отд. техн. наук, № 2, 1957. ² С. С. Дарбинян, Изв. АН АрмССР, серия техн. наук, т. XII, № 1, 1959. ³ И. М. Рабинович, К динамическому расчету сооружений за пределом упругости. Сб. ст. Исследование по динамике сооружений, Строиниздат, 1947. ⁴ И. Г. Пановко, Основы прикладной теории упругих колебаний. Машгиз, М., 1957.