

МАТЕМАТИКА

Р. М. Мартиросян

Об одной обобщенной задаче Штурма-Лиувилля

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном
 11.IV.1959)

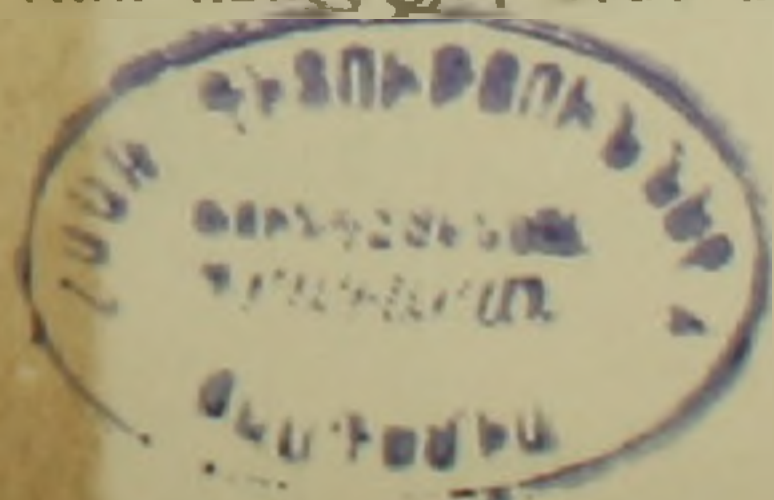
Вопрос о строении спектра оператора $-u'' + pu$ с комплексным потенциалом $p(x)$ был впервые изучен М. А. Наймарком⁽¹⁾, который для получения соответствующих результатов пользовался найденной им асимптотикой решений на полуоси. Ясно, что этот метод может встретить значительные затруднения, если возмущения оператора $-u''$ гораздо более сложной природы и не удастся выяснить асимптотический характер решений. Тем не менее в ряде случаев представляет интерес рассмотреть более общие операторы. Отметим в этой связи интересную задачу, предложенную впервые М. М. Джрбашяном, о разложении по собственным функциям оператора вида

$$-u'' + pu + \int_a^b K(x, t) u(t) dt,$$

решение которой на конечном промежутке дано в работе А. Б. Нерсесяна⁽²⁾ и исследование которой продолжается этим автором в различных направлениях. В настоящей заметке мы ставим более скромную задачу—выяснить характер спектра соответствующих операторов, но при этом для операторов гораздо более общего вида.

Метод доказательства приводимых ниже теорем имеет точки прикосновения с заметкой И. М. Гельфанда⁽³⁾, исследование которого довольно неполно и по идее ближе к исследованию автора⁽⁴⁾, посвященному спектру несамосопряженного оператора Шредингера. Однако из-за наличия интегрального оператора и оператора L приходится по-существу дать новые доказательства, краткое изложение которых будет дано в этой заметке, ради удобства, лишь для операторов, заданных на всей оси. Заметим, что все результаты почти без изменения рассуждений переносятся и на случай полуоси.

Переходя к точным формулировкам, обозначим через Ω область определения гипермаксимального оператора $-u''$, заданного в гильбертовом пространстве $L_2(-\infty, \infty)$. Как известно, этот оператор яв-



ляется замыканием в L_2 оператора $-u''$, рассматриваемого на многообразии всех финитных функций.

Пусть, далее, $p(x)$ — произвольная ограниченная комплекснозначная функция, суммируемая с квадратом, а комплекснозначная функция $K(x, t)$ типа Гильберта-Шмидта, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |K(x, t)|^2 dx dt < \infty. \quad (1)$$

Обозначив через L произвольный (несамосопряженный) ограниченный оператор в L_2 , введем в рассмотрение оператор

$$Tu = -u'' + p(x)Lu + \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)u(t) dt \quad (u \in \Omega) \quad (2)$$

с той же областью определения Ω , что и у оператора $-u''$.

Теорема 1. Непрерывный спектр оператора T совпадает с положительной полуосью, а точки спектра, лежащие в остальной части комплексной плоскости, могут быть лишь собственными значениями, не имеющими точек накопления вне положительной полуоси.

Доказательство. Известно, что если $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ и λ неположительно, то решения уравнения $-u'' - \lambda u = f$ ($u \in \Omega$) даются формулой $u = B_\lambda f$, где резольвента B_λ оператора $-u''$ имеет вид

$$B_\lambda f = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iV\sqrt{\lambda}|x-t|}}{2iV\sqrt{\lambda}} f(t) dt \quad (\text{Im} V\sqrt{\lambda} > 0). \quad (3)$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$Tu - \lambda u = -u'' + p(x)Lu + \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)u(t) dt - \lambda u = f. \quad (4)$$

Если λ неположительно, то очевидно это уравнение равносильно следующему

$$u = B_\lambda f - B_\lambda \left\{ p(x)Lu + \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)u(t) dt \right\}. \quad (5)$$

Покажем, что при таких λ последний член правой части (5) вполне непрерывный интегральный оператор, порождаемый некоторым ядром типа Гильберта-Шмидта $K_0(x, t; \lambda)$. В самом деле, легко видеть, что

$$-B_\lambda \left\{ p(x)Lu + \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)u(t) dt \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} K_0(x, t; \lambda)u(t) dt. \quad (6)$$

где

$$K_0(x, t; \lambda) = L^* \left(\frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x-t|}}{2i\sqrt{\lambda}} \overline{p(t)} \right) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x-s|}}{2i\sqrt{\lambda}} K(s, t) ds. \quad (7)$$

Поскольку $\operatorname{Im} \sqrt{\lambda} = \tau > 0$, то, применяя неравенство Бунаковского, легко убедиться, что интеграл в последней формуле типа Гильберта-Шмидта. Далее

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| L^* \left(\frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x-t|}}{2i\sqrt{\lambda}} \overline{p(t)} \right) \right|^2 dt \leq \|L\|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\tau|x-t|}}{4|\lambda|} |p(t)|^2 dt.$$

Интегрируя это неравенство по x и принимая во внимание, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau|x-t|} dx = \frac{1}{\tau} \text{ не зависит от } t, \text{ убеждаемся в справедливости на-}$$

шего утверждения. Предположим теперь, что λ неположительно и не является собственным значением оператора T . Тогда однородное уравнение (4), а следовательно и однородное уравнение (5), имеют лишь тривиальное решение. Поэтому в силу альтернативы Фредгольма уравнение (5), а следовательно и (4) разрешимы при любой $f(x) \in L_2$. Итак, замкнутый оператор $(T - \lambda E)^{-1}$ определен на всем пространстве и, следовательно, ограничен. Таким образом точками спектра оператора T , лежащими вне положительной полуоси, могут быть лишь собственные значения. Эти последние определяются из уравнения

$$u + B_\lambda \left\{ p(x) Lu + \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) u(t) dt \right\} = 0.$$

Но поскольку вполне непрерывный оператор

$$B_\lambda \left\{ p(x) Lu + \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) u(t) dt \right\}$$

аналитически зависит от параметра λ вне положительной полуоси, то в силу известного результата М. В. Келдыша⁽⁵⁾ собственные значения оператора T , лежащие вне положительной полуоси, могут иметь точки накопления лишь на положительной полуоси. Переходя к доказательству первой части теоремы, предположим сперва, что при некотором неположительном λ существует резольвента $R_\lambda = (T - \lambda E)^{-1}$ оператора T и покажем, что она является интегральным оператором вида

$$R_\lambda f = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x-t|}}{2i\sqrt{\lambda}} + H(x, t; \lambda) \right\} f(t) dt, \quad (8)$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |H(x, t; \lambda)|^2 dx dt < \infty. \quad (9)$$

Действительно, если существует R_λ , то уравнение (4) разрешимо при любом f , причем решение удовлетворяет уравнению (5). Поэтому если резольвентное ядро для ядра $K_0(x, t; \lambda)$ обозначить через $H_0(x, t; \lambda)$, то

$$R_\lambda f = - \int_{-\infty}^x \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x-t|}}{2i\sqrt{\lambda}} f(t) dt - \int_{-\infty}^x H_0(x, t; \lambda) \left\{ \int_{-\infty}^x \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|t-s|}}{2i\sqrt{\lambda}} f(s) ds \right\} dt,$$

откуда и следуют (8) и (9), поскольку, как известно, $H_0(x, t; \lambda)$ тип Гильберта-Шмидта. Получив представление (8), допустим теперь, что при некотором положительном $\lambda = \lambda_0 > 0$ существует резольвента R оператора T . Рассмотрим уравнение:

$$-u'' - \lambda_0 u = Tu - p(x) Lu - \int_{-\infty}^x K(x, t) u(t) dt - \lambda_0 u = f. \quad (10)$$

Очевидно, оно эквивалентно уравнению

$$u = R_{\lambda_0} f + R_{\lambda_0} Cu, \quad (11)$$

где положено

$$Cu = p(x) Lu + \int_{-\infty}^x K(x, t) u(t) dt.$$

Покажем, что $R_{\lambda_0} Cu$ — вполне непрерывный оператор. Для этого заметим, что из существования R_{λ_0} следует существование R_λ в некоторой окрестности $\lambda = \lambda_0$. Выберем из этой окрестности последовательность неположительных $\lambda = \lambda_n$ так, чтобы $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$. В силу ограниченности оператора C будем иметь $\|R_{\lambda_n} C - R_{\lambda_0} C\| \rightarrow 0$. Но из представления (8) легко следует, что все $R_{\lambda_n} C$ вполне непрерывны, а поэтому и $R_{\lambda_0} C$ вполне непрерывен. С другой стороны, поскольку однородное уравнение (10), как известно, имеет лишь тривиальное решение, то, как и выше, пользуясь альтернативой Фредгольма, убеждаемся в разрешимости уравнения (10) при любой $f(x) \in L_2$. Но в силу замкнутости оператора $-u''$ это означает существование ограниченной резольвенты R_{λ_0} оператора $-u''$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 2. Если $|p(x)| \leq M$ и $\|K\|^2 = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^x |K(x, t)|^2 dx dt$, то

весь спектр оператора T лежит внутри параболы $\eta^2 = 4\alpha(a + \xi)$, где $\alpha = \sqrt{2} (M\|L\| + \|K\|)$, $\xi = \operatorname{Re} \lambda$, $\eta = \operatorname{Im} \lambda$.

Доказательство. Если $u(x, \lambda)$ есть собственная функция, соответствующая собственному значению λ^2 , то

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{2i\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(x-t)} \left\{ p(t) Lu + \int_{-\infty}^{\infty} K(t, s) u(s) ds \right\} dt. \quad (12)$$

Но, считая $u(x, \lambda)$ нормированной, будем иметь

$$\left| p(t) Lu(t) + \int_{-\infty}^{\infty} K(t, s) u(s) ds \right| \leq 2M^2 |Lu(t)|^2 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} |K(t, s)|^2 ds.$$

Теперь из (12) получаем оценку (полагая $\lambda = \tau + i\tau$, $\tau > 0$),

$$|u(x, \lambda)|^2 \leq \frac{1}{4|\lambda|^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau|x-t|} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau|x-t|} \left\{ 2M^2 |Lu(t)|^2 + \right. \\ \left. + 2 \int_{-\infty}^{\infty} |K(t, s)|^2 ds \right\} dt.$$

Еще одно интегрирование по x , с учетом нормировки $u(x, \lambda)$, приводит к неравенству

$$1 \leq \frac{2 \|M\| \|L\| + \|K\|^2}{|\lambda|^2 \tau^2},$$

или, принимая во внимание наши обозначения, к неравенству $|\lambda|^2 \tau^2 \leq 1$. Отсюда $\tau^2 \leq \alpha$. С другой стороны, если положить $\eta = \operatorname{Im} \lambda^2$, $\xi = \operatorname{Re} \lambda^2$, то легко видеть, что $\tau^2 = 4\tau^2(\tau^2 + \xi)$, откуда и следует утверждение теоремы.

Теорема 3. Предположим, что оператор L ограничен, если его рассматривать над пространством ограниченных функций из $L_2(-\infty, \infty)$ с нормой $\|u\| = \sup |u(x)|$. Если, кроме того, $p(x)$ суммируема и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |K(x, t)| dx dt < \infty,$$

то дискретный спектр оператора T ограничен.

Доказательство. Предварительно заметим, что все функции из области определения оператора T ограничены и непрерывны, что легко следует хотя бы из (3). Пусть теперь $u(x, \lambda)$ — собственная функция, соответствующая собственному значению λ^2 . Тогда

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{2i\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(x-t)} p(t) Lu(t, \lambda) dt +$$

$$+ \frac{1}{2i\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda|x-s|} K(s, t) ds \right\} u(t, \lambda) dt.$$

Положим $\|L\|_C = M_1$, где $\|L\|_C$ означает норму оператора L , рассматриваемого над пространством ограниченных функций. Пусть, далее

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p(t)| dt = M_2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)| ds dt = M_3.$$

Тогда, если обозначить $\sup |u(x, \lambda)| = C_\lambda$, то из написанного уравнения следует

$$C_\lambda \leq \frac{M_1 M_3 + M_2}{2|\lambda|} C_\lambda,$$

что невозможно при больших λ .

Переходя к следующей теореме, предположим, что L — единичный оператор. Таким образом, Tu имеет вид

$$Tu = -u'' + p(x)u + \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) u(t) dt. \quad (13)$$

Теорема 4. Если при некотором $\varepsilon_0 > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\varepsilon_0|t|} |p(t)| dt < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\varepsilon_0(|x|+|t|)} |K(x, t)| dx dt < \infty,$$

то дискретный спектр оператора T , определенного равенством (13), конечен.

Доказательство. Как мы уже знаем, собственные функции определяются из уравнения

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{2i\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} L(x, t; \lambda) u(t, \lambda) dt, \quad (14)$$

где

$$L(x, t; \lambda) = e^{i\lambda|x-t|} p(t) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda|t-s|} K(s, t) ds \quad (\operatorname{Im} \lambda > 0). \quad (15)$$

Поэтому собственные значения являются нулями знаменателя Фредгольма

$$D(1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{d_n}{n!}, \quad (16)$$

где положено

$$d_n = \frac{1}{(2i\lambda)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} a_n(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \quad (17)$$

и

$$a_n(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \det \|L_{ik}\|, \quad L_{ik} = e^{i\lambda|x_i - x_k|} p(x_k) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda|x_i - s|} K(s, x_k) ds. \quad (18)$$

Очевидно, L_{ik} аналитичны по λ при $\operatorname{Im} \lambda > -\varepsilon_0$. Покажем, что все d_n могут иметь лишь полюсы первого порядка в точке $\lambda = 0$. Действительно, $a_n(0, x_1, \dots, x_n) = 0$, ибо при $\lambda = 0$ все строки этого определителя совпадают. При дифференцировании по λ до $(n-2)$ -го порядка получим некоторую сумму определителей, в каждом из которых по крайней мере две строки совпадут при $\lambda = 0$. Итак, d_n может иметь лишь простой полюс с вычетом $a_{-1}^{(n)}$, равным

$$a_{-1}^{(n)} = \frac{1}{(2i)^n (n-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^{n-1} a_n(0, x_1, \dots, x_n)}{\partial \lambda^{n-1}} dx_1 \cdots dx_n. \quad (19)$$

Чтобы оценить эти вычеты, заметим, что подинтегральная функция является суммой n определителей, в каждом из которых одна строка из a_n сохранена, а все другие продифференцированы один раз по λ , и λ положено равным нулю. Если элементы одного из этих определителей обозначить через β_{ik} и положить

$$\beta_{ik} = A_{ik} \frac{e^{\varepsilon_0|x_i|}}{\varepsilon_0}, \quad (20)$$

то на основании (18) легко получить оценку

$$|A_{ik}| \leq e^{\varepsilon_0|x_k|} |p(x_k)| + \int_{-\infty}^{\infty} e^{\varepsilon_0|s|} |K(s, x_k)| ds,$$

если β_{ik} получено в результате дифференцирования соответствующей строки определителя a_n и оценку

$$|A_{ik}| \leq \varepsilon_0 \left\{ e^{\varepsilon_0|x_k|} |p(x_k)| + \int_{-\infty}^{\infty} e^{\varepsilon_0|s|} |K(s, x_k)| ds \right\}$$

в противном случае. На основании этих оценок с помощью неравенства Адамара находим

$$\det \|A_{ik}\| \leq \varepsilon_0^n \prod_{k=1}^n \left\{ e^{\varepsilon_0|x_k|} |p(x_k)| + \int_{-\infty}^{\infty} e^{\varepsilon_0|s|} |K(s, x_k)| ds \right\}. \quad (21)$$

Положим теперь

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\varepsilon_0|x|} |p(x)| dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\varepsilon_0|x|} e^{\varepsilon_0|s|} |K(s, x)| ds dx. \quad (22)$$

Тогда, учитывая (19) и (20), а также сделанное выше замечание, из (21) получаем

$$|a_{-1}^{(n)}| \leq \frac{1}{2^n (n-1)!} n^{\frac{n}{2}} \frac{M^n}{\varepsilon_0^{n-1}}. \quad (23)$$

Покажем теперь, что функция $D(1)$ аналитична по λ в области $\operatorname{Im} \lambda > -\varepsilon_0$ и может иметь лишь полюс в точке $\lambda = 0$. Для этого положим

$$B_{ik} e^{\varepsilon_0|x_i|} = L_{ik}, \quad (24)$$

где L_{ik} определены формулой (18). Так же, как и выше, получаем оценку

$$|B_{ik}| \leq e^{\varepsilon_0|x_k|} |p(x_k)| + \int_{-\infty}^{\infty} e^{\varepsilon_0|s|} |K(s, x_k)| ds.$$

Пользуясь вновь неравенством Адамара, находим отсюда

$$|\det \|B_{ik}\|| \leq n^{\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^n \left\{ e^{\varepsilon_0|x_k|} |p(x_k)| + \int_{-\infty}^{\infty} e^{\varepsilon_0|s|} |K(s, x_k)| ds \right\}.$$

Теперь, учитывая (24) и (17), имеем

$$|d_n| \leq \frac{1}{2^n |\lambda|^n} n^{\frac{n}{2}} M^n,$$

где M определено формулой (22). Таким образом, мажорантным для (16) является сходящийся ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n |\lambda|^n n!} n^{\frac{n}{2}} M^n.$$

Итак, $D(1)$ аналитична по λ в области $\operatorname{Im} \lambda > -\varepsilon_0$ и может иметь особенность лишь в точке $\lambda = 0$. Но эта особенность может быть лишь полюсом. В самом деле, соответствующий ряду (16) ряд из вычетов

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_{-1}^{(n)}}{n!}$$

мажорируется в силу оценки (23) сходящимся рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n [(n-1)!]^2} \frac{n^{\frac{n}{2}} M^n}{\varepsilon_0^{n-1}}.$$

Чтобы завершить доказательство теоремы, остается вспомнить, что нули $D(1)$ совпадают с собственными значениями, и воспользоваться предыдущей теоремой.

В заключение заметим, что все теоремы, установленные выше, справедливы и для оператора

$$Tu = -u'' + p(x)Lu + \int_0^x K(x, t)u(t)dt,$$

рассматриваемого по полуоси $(0, \infty)$ с краевыми условиями вида

$$\alpha u(0) + \beta u'(0) = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0. \quad (25)$$

Здесь оператор B_λ , т. е. резольвента оператора $-u''$ при условиях (25) имеет вид

$$B_\lambda f = \frac{1}{2i\lambda} \int_0^\infty \left| \frac{i\beta\lambda - \alpha}{i\beta\lambda + \alpha} e^{i\lambda(t-x)} + e^{i\lambda(x-t)} \right| f(t) dt$$

и все рассуждения можно полностью повторить с очень незначительными усложнениями.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

2. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Շառլի-Լիուվիլի մի քնդիանացված խնդրի մասին

Դիցուք Ω -ն ամբողջ առանցքի վրա դիտարկվող $-u''$ հիպերմաքսիմալ օպերատորի որոշման տիրույթն է, $p(x)$ -ը սահմանափակ և քառակուսով ինտեգրելի կոմպլեքս ֆունկցիա է, իսկ $K(x, t)$ -ը հարթույթյան վրա քառակուսով ինտեգրելի ֆունկցիա է: Ω -ի վրա դիտարկվում է

$$Tu = -u'' + p(x)Lu + \int_x^\infty K(x, t)u(t)dt \quad (u \in \Omega)$$

օպերատորը, որտեղ L -ը կամայական (ոչ ինքնահամալուծ) սահմանափակ օպերատոր է: Ապացուցվում են հետևյալ թեորեմները:

Թեորեմ 1. T օպերատորի անընդհատ սպեկտրը ճամրկնում է պրական կիսաառանցքի հետ: Կոմպլեքս հարթության մնացած մասում սպեկտրի կետեր կարող են լինել միայն սեփական արժեքները, որոնք չեն կարող ունենալ կուտակման կետեր պրական կիսաառանցքից դուրս:

Թեորեմ 2. Եթե $|p(x)| \leq M$ և

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |K(x, t)|^2 dx dt = \|K\|^2,$$

ապա T օպերատորի ամբողջ սպեկտրը ընկած է $\gamma_\xi^2 = 4x(x + \xi)$ պարաբոլի ներսը, որտեղ $x = \sqrt{2(M\|L\| + \|K\|)}$, $\xi = \operatorname{Re} \lambda$, $\gamma_\xi = \operatorname{Im} \lambda$:

Թեորեմ 3. Ենթադրենք, որ L օպերատորը սահմանափակ է, եթե այն դիտարկենք $L_2(-\infty, \infty)$ դասին պատկանող սահմանափակ ֆունկցիաների վրա, որոնց նորման որոշվում է $\|u\| = \sup |u(x)|$ հավասարությունով: Եթե բացի այդ $p(x)$ -ը և $K(x, t)$ -ը հանրագումարելի են, ապա T օպերատորի դիսկրետ սպեկտրը կլինի սահմանափակ:

Թեորեմ 4. Եթե որևէ $\varepsilon_0 > 0$ -ի համար ունենք

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\varepsilon_0 |t|} |p(t)| dt < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\varepsilon_0 |x|} e^{\varepsilon_0 |t|} |K(x, t)| dx dt < \infty$$

և L -ը միավոր օպերատոր է, ապա T օպերատորի դիսկրետ սպեկտրը վերջավոր է:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԻՈՍՏՈՒԹՅՈՒՆ

¹ М. А. Наймарк, ДАН СССР, 85, 1 (1952). ² А. Б. Нерсисян, Известия АН АрмССР* (серия физ.-мат. наук), т. XII, № 3 (1959). ³ И. М. Гельфанд, Успехи матем. наук, VII, 6 (1952). ⁴ Р. М. Мартirosян, Известия АН АрмССР* (серия физ.-мат. наук), т. X, № 1 (1957). ⁵ М. В. Келдыш, ДАН СССР, 77, 1 (1951).