ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXIX 1959 1

ФИЗИКА

Г. С. Саакян

Новый механизм рождения и аннигиляции электронных пар в среде

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. М. Кочаряном 17. III. 1959)

1. Из-за нарушения закона сохранения импульсов в вакууме не может иметь место процесс рождения электронно-позитронной пары γ-квантом и наоборот—превращение пары в один квант. Однако эти явления возможны в диспергирующей среде с показателем преломления меньше единицы. В случае среды для обсуждаемых процессов имеем:

$$\vec{k} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \text{ и } \omega = E_1 + E_2; \quad k = n(\omega)\,\omega, \tag{1}$$

где $\vec{p}_1$ и E_1—импульс и энергия электрона, $\vec{p}_2$ и E_2—импульс и энергия позитрона, $\vec{k}$ и ω—импульс и энергия фотона, n—показатель преломления для заданной частоты света. В статье используется система единиц $c = \frac{h}{2\pi} = 1$ и $e^2/4\pi = 1/137$. Далее, мы предполагаем, что среда покоится.

Из требования, что $|\cos\alpha|^2 \leqslant 1$, где α—угол между векторами $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, а также из законов сохранений получаем:

$$\frac{|p_1 - p_2|}{E_1 + E_2} < n < \frac{p_1 + p_2}{E_1 + E_2}. \tag{2}$$

(2) показывает, что $n < 1$. В данном случае это условие выполняется, так как для рассматриваемых явлений $\omega > 1$ Мэв, а при таких больших частотах электромагнитных волн известно, что показатель преломления меньше единицы.

Энергии квантов для изучаемого процесса ограничены не только снизу, но и сверху. Верхняя граница энергии квантов определяется из естественного требования

$$\lambda \gtrsim l, \tag{3}$$

где $\lambda = \frac{1}{\omega}$ — длина волны излучения деления на 2π, а l—среднее расстояние между частицами. При $\lambda < l$ понятие среды с показателем преломления перестает быть верным, и вместо законов сохранений для среды мы будем иметь дело с уравнениями для вакуума. С другой стороны, среднее расстояние между частицами (электронами) порядка $N^{-1/3}$, где N — число частиц в 1 $см^3$. Следовательно, верхняя граница энергии фотонов определяется соотношением,

$$\omega \lesssim \frac{1}{l} \approx N^{1/3}. \tag{4}$$

Отсюда следует, что для порога образования пар, необходимая плотность частиц должна быть порядка

$N \gtrsim \left(\frac{2}{\lambda_e}\right)^3 \approx 1{,}4 \cdot 10^{32} см^{-3}$, где $\lambda_e = 3{,}88 \cdot 10^{-11} см$ — комптоновская длина волны электрона. Такие большие плотности не предполагаются даже во внутренних слоях солнца и нормальных звезд, однако возможно, что существуют ультракарлики с подобными плотностями. Предполагая, что в природе возможно существуют такие звезды, ниже мы будем вычислять вероятности однофотонной аннигиляции и рождения электронных пар.

2. Сперва рассмотрим рождение пары γ-квантом. Для матричного элемента этого процесса имеем [1, 2, 3]

$$S^{(1)} = -\frac{\sqrt{\mu}\, e}{\sqrt{2n^2\alpha\omega V}} \int \overline{\Psi}_1 \gamma_\mu e^{i\widetilde{k}\widetilde{x}} \Psi_2 d^4x, \tag{5}$$

где $n^2 = \varepsilon\mu$, ε и μ — диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость среды, $\widetilde{k} = (\vec{k}, i\omega)$ — четырехмерный импульс фотона, γ_μ — проекция матрицы $\widetilde{\gamma}$ на направление поляризации кванта, V — объем пространства, в котором заданы частицы, α — функция частоты

$$\alpha = 1 + \frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}, \tag{6}$$

и наконец Ψ_1 и Ψ_2 — волновые функции электрона и позитрона

$$\Psi_1 = \frac{u_1(p_1)}{\sqrt{V}} e^{i\widetilde{p}_1\widetilde{x}}; \quad \Psi_2 = \frac{u_2(-p_2)}{\sqrt{V}} e^{-i\widetilde{p}_2\widetilde{x}}. \tag{7}$$

Здесь $\widetilde{p}_1$ и $\widetilde{p}_2$ — соответственно четырехмерный импульс электрона и позитрона. Подставляя (7) в (5), находим

$$S^{(1)} = -\frac{(2\pi)^4 \sqrt{\mu}\, e}{V^{1/2}\sqrt{2n^2\alpha\omega}} \left(\overline{u}_1(p_1)\gamma_\mu u_2(-p_2)\right) \delta(\widetilde{k} - \widetilde{p}_1 - \widetilde{p}_2). \tag{8}$$

Вероятность перехода в единицу времени равна

$$dW = \frac{\mu e^2}{(2\pi)^2 \cdot 2n^2\alpha\omega} |\overline{u}_1(p_1)\gamma_\mu u_2(-p_2)|^2 \delta(\widetilde{k} - \widetilde{p}_1 - \widetilde{p}_2)\, d^3p_1 d^3p_2. \tag{9}$$

Произведя в (9) усреднение по поляризациям кванта и суммирование по проекциям электронов, получаем

$$dW = \frac{\mu e^2 d^3p_1 d^3p_2}{(2\pi)^2 2n^2 \alpha\omega}\,\delta(\vec{k}-\vec{p}_1-\vec{p}_2)\left(-\frac{1}{8E_1E_2}\right)\times$$

$$\times\sum_{\mu=1}^{2} Sp\gamma_\mu(ip_{2\nu}\gamma_\nu+m)\gamma_\mu(ip_{1\nu}\gamma_\nu-m). \qquad (10)$$

где E_1 и E_2—энергии электрона и позитрона. При получении (11) мы учли соотношение коммутации $\beta\gamma_\mu = -\gamma_\mu\beta$ для $\mu = 1;2$. Вычисление шпура дает

$$\sum_\mu Sp\gamma_\mu(ip_{2\nu}\gamma_\nu+m)\gamma_\mu(ip_{1\nu}\gamma_\nu-m) = 8(p_1p_2\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - E_1E_2 - m^2), \qquad (11)$$

где ϑ_1—угол между векторами $\vec{p}_1$ и $\vec{k}$, а ϑ_2—угол между $\vec{p}_2$ и $\vec{k}$.

Подставляя (11) в (10) и произведя интегрирование по импульсу позитрона, получаем

$$dW = \frac{\mu e^2 d^3p_1}{(2\pi)^2 2n^2\alpha\omega}\,\frac{E_1E_2+m^2-p_1p_2\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2}{E_1E_2}\,\delta(\omega-E_1-E_2). \qquad (12)$$

здесь теперь E_2, p_2 и ϑ_2 являются функцией p_1 и E_1.

$$2kp_2\cos\vartheta_2 = k^2 + p_2^2 - p_1^2,$$

$$p_2 = \sqrt{\omega^2 + E_1^2 - 2\omega E_1 - m^2}. \qquad (13)$$

$$E_2 = \omega - E_1.$$

Нам остается проинтегрировать по импульсу электрона. Имеем $d^3p_1 = 2\pi p_1E_1dE_1\sin\vartheta_1 d\vartheta_1$. Далее

$$\delta(\omega-E_1-E_2)\,dE_1 = \delta(\omega-E_f)\left|\frac{\partial E_1}{\partial E_f}\right| dE_f = \frac{p_1E_2}{\omega p_1 - E_1k\cos\vartheta_1}, \qquad (14)$$

где $E_f = E_1 + E_2$—энергия конечного состояния,

$$E_f = E_1 + \sqrt{E_1^2 + k^2 - 2kp_1\cos\vartheta_1}. \qquad (15)$$

Учитывая (13) и (14), для вероятности получаем

$$dW = \mu\frac{e^2}{4\pi}\,\frac{E_1E_2p_1^2}{n^2\alpha\omega^2}\left(1+\frac{m^2}{E_1E_2}-\right.$$

$$\left.-\frac{p_1(k^2+p_2^2-p_1^2)}{2kE_1E_2}\cos\vartheta_1\right)\frac{\sin\vartheta_1 d\vartheta_1}{p_1 - nE_1\cos\vartheta_1}. \qquad (16)$$

Здесь, согласно (13) p_2 и E_2 являются лишь функцией энергии электрона E_1. Интегрируя (16) по углу ϑ_1, получаем полную вероятность процесса в единицу времени

$$W=\frac{\mu}{137}\,\frac{E_2p_1^2}{n\alpha k^2}\left\{\left(1+\frac{m^2}{E_1E_2}\right)\ln\frac{p_1+nE_1}{p_1-nE_1}-\right.$$

$$\left.-\frac{p_1(k^2+p_2^2-p_1^2)}{kE_1E_2}\left[\frac{p_1}{2nE_1}\ln\frac{p_1+nE_1}{p_1-nE_1}-1\right]\right\}. \qquad (17)$$

Для получения вероятности рождения пары на единицу пути следует (17) разделить на фазовую скорость света $\frac{c}{n}$, т. е. умножить на n; так как принято $c=1$.

3. Теперь перейдем к рассмотрению процесса однофотонной аннигиляции пары электрон-позитрон. Матричный элемент равен

$$S^{(1)}=-\frac{\sqrt{\mu}\,e}{\sqrt{2n^2\alpha\omega V}}\int\bar{\Psi}_2\gamma_\mu e^{-i\bar{k}\bar{x}}\Psi_1d^4x, \qquad (18)$$

где Ψ_1 и Ψ_2—волновые функции электрона и позитрона. Они по-прежнему определяются формулой (7). Интегрируя (18) по четырехмерному объему, находим

$$S^{(1)}=-\frac{(2\pi)^4\sqrt{\mu}\,e}{V\sqrt{2n^2\alpha\omega}}\,|\bar{u}_2(-p_2)\gamma_\mu u_1(p_1)|\,\delta(\bar{p}_1+\bar{p}_2-\bar{k}), \qquad (19)$$

где $\bar{p}_1$ – импульс электрона, а $\bar{p}_2$—импульс позитрона. Матричные элементы (8) и (19) являются эрмитово сопряженными. Поэтому операция суммирования модуля квадрата матричного элемента $S^{(1)}$, по поляризациям фотона и электронов, приведет к одинаковому результату для процессов рождения и аннигиляции фотонов (принцип детального равновесия).

Учитывая это, а также то обстоятельство, что статистический вес конечного состояния теперь равен $(2\pi)^{-3}Vd^3k$, для вероятности перехода в единицу времени получаем формулу

$$dW'=\frac{\pi\mu e^2}{Vn^2\alpha\omega}\,\frac{E_1E_2+m^2-p_1p_2\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2}{E_1E_2}\,\delta(\bar{k}-\bar{p}_1-\bar{p}_2)\,d^3k, \qquad (20)$$

где ϑ_1—угол между $\vec{p}_1$ и $\vec{k}$, а ϑ_2—угол между векторами $\vec{p}_2$ и $\vec{k}$:

$$2kp_1\cos\vartheta_1=k^2+p_1^2-p_2^2,$$

$$2kp_2\cos\vartheta_2=k^2+p_2^2-p_1^2. \qquad (21)$$

Интегрируя (20) по d^3k, получаем

$$dW'=\frac{\mu\pi e^2}{Vn^2\alpha\omega}\,\frac{E_1E_2+m^2-p_1p_2\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2}{E_1E_2}\,\delta(\omega-E_1-E_2). \qquad (22)$$

Наш расчет мы вели для системы отсчета, относительно которой среда покоится. С другой стороны, основная часть электронов находящихся в среде, это сравнительно медленные электроны, которые сгруппированы вокруг ядер и в среднем по времени также находятся в покое относительно системы отсчета. Наоборот, число покоящихся позитронов намного меньше числа быстрых позитронов (из-за малости времени жизни). Следовательно, мы практически всегда будем иметь дело со столкновением быстрых позитронов с атомными электронами. Приведенные рассуждения справедливы лишь при температурах $\varkappa T < m$, где $\varkappa$—постоянная Больцмана. При $\varkappa T > m$ число образовавшихся в единице объема электронных пар очень велико по сравнению с атомной электронной плотностью ([4]), и поэтому число электронов и позитронов в таких областях звезд приблизительно равно. Подобные физические условия возможно существуют в центральной части некоторых звезд.

Вероятность (22) относится к одной паре частиц, находящихся в рассматриваемом объеме V. Чтобы получить полную вероятность однофотонной аннигиляции, рассчитанную на один позитрон, необходимо (22) умножить на число электронов с энергией в интервале $(E_1;\ E_1 + dE_1)$ и проинтегрировать по E_1. Пусть $VN(E_1)\,dE_1$—есть функция распределения частиц по энергиям, тогда вероятность аннигиляции позитрона в единицу времени равна.

$$W' = \frac{\mu\pi e^2}{n^2 a\omega}\,\frac{E_1E_2 + m^2 - p_1p_2\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2}{E_1E_2}\,N(E_1). \tag{23}$$

Разделяя (23) на относительную скорость частиц $|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$ и учитывая, что $e^2/4\pi = 1/137$, получаем вероятность аннигиляции позитрона на единицу пути

$$W' = \frac{4\pi^2}{137}\,\frac{\mu}{n^2 a\omega}\,N(E_1)\,\frac{E_1E_2 + m^2 - p_1p_2\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2}{|E_2\vec{p}_1 - E_1\vec{p}_1|}, \tag{24}$$

Напомним, что ϑ_1 и ϑ_2 определяются формулами (21).

В заключение выражаю благодарность академику В. А. Амбарцумяну, а также сотрудникам Физического института Академии наук Армянской ССР Н. М. Кочаряну, И. И. Гольдману и А. Ц. Аматуни за ценные советы и обсуждение статьи.

Физический институт
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Միջավայրում էլեկտրոնային զույգերի ծնման և անիհիլացման նոր մեխանիզմ

Դատարկ տարածության մեջ, առանց փոխազդեցության մեջ մտնող կողմնակի մասնիկների առկայության հնարավոր չէ զույգերի ծնում և ոչնչացում՝

$$\gamma \rightleftarrows e^+ + e^-. \tag{1}$$

որտեղ γ; e^+ և e^-—համապատասխանաբար նշանակում են γ-քվանտ, պոզիտրոն և էլեկտրոն: Այդ պրոցեսն արգելված է իմպուլսի օրենքի պահպանության շնորհիվ: Սակայն միջավայրերում, որոնցում լույսի տարածման ֆազային արագությունը մեծ է այդ արագությունից, դատարկության մեջ (1) պրոցեսը կարող է տեղի ունենալ:

Դրա համար միայն անհրաժեշտ է, որ

$$\lambda > N^{-\frac{1}{3}}, \qquad (2)$$

որտեղ N-ը մասնիկների (էլեկտրոնների) քանակն է միավոր ծավալում, իսկ λ-ն լույսի ալիքի երկարությունն է բաժանված 2π-ի։ Մյուս կողմից նկատի ունենալով, որ (1)-ի տեղի ունենալու համար կվանտի էներգիան պետք է մեծ լինի $2m$-ից, որտեղ m-ը էլեկտրոնի հանգստի էներգիան է, և որ բնության մեջ միջուկային մատերիայից ավելի խիտ միջավայր գոյություն չունի, մենք ստանում ենք (1) պրոցեսի տեղի ունենալու անհրաժեշտ պայմանը՝

$$8\lambda_e^{-3} < N < \lambda_\pi^{-3}, \qquad (3)$$

որտեղ λ_e և λ_π համապատասխանաբար էլեկտրոնի և π-մեզոնի կոմպտոնի ալիքի երկարություններն են, այսինքն անհրաժեշտ խտությունները պետք է լինեն $1,3 \cdot 10^{32} < N < 10^{38}$ սմ$^{-3}$։

Այսպիսի ֆիզիկական պայմաններ գոյություն ունեն նեյտրոնային աստղերի ընդերքում և հետևաբար (1) պրոցեսը կարող է միայն ընթանալ նրանցում։

Աշխատանքում հաշված են անիհիլյացման և ծնման հավանականությունները։ γ-կվանտով էլեկտրոնային զույգի ծնման հավանականությունը տրվում է բանաձև (18)-ով, իսկ զույգերի անիհիլյացման հավանականությունը տրվում է բանաձև (25)-ով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. И. Ахиезер* и *В. Б. Берестецкий*, Квантовая электродинамика, ГИТТЛ, М., 1953. [2] *K. M. Watson* и *J. M. Jauch*, Phys. Rev., 75, 1249, 1949. [3] *М. М. Рязанов*, ЖЭТФ, 32, 1244 (1957). [4] *Л. Д. Ландау* и *Е. Лифшиц*, „Статистическая физика", ГИТТЛ, М.—Л., 1951.