

А. В. Чакмазян

О двойственно нормализованных поверхностях евклидова пространства

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном
 16.IV.1959)

В работе ⁽¹⁾ была рассмотрена так называемая двойственная нормализация x_m в P_n . Гиперполоса Γ_m нормализована двойственно, если она нормализована в смысле А. П. Нордена ⁽²⁾, причем ее нормаль 1-го рода содержит характеристику семейства главных гиперплоскостей гиперполосы.

Рассмотрим поверхность $n-2$ -измерений x_{n-2} , погруженную в евклидово E_n . Допустим, что x_{n-2} дополнена до гиперполосы так, что характеристики семейства главных касательных гиперплоскостей перпендикулярны касательной плоскости поверхности x_{n-2} , так, что ее естественная нормализация будет одновременно и двойственной. Если обозначить через X нормальный вектор главной касательной гиперплоскости гиперполосы, а Y направляющий вектор характеристической прямой, то основные дифференциальные уравнения Γ_{n-2} ⁽³⁾ будут иметь следующий вид.

$$\left. \begin{aligned} \nabla_j r_i &= h_{ji} X + k_{ji} Y & (a) \\ \nabla_j X &= -h_j^k r_k & (b) \\ \nabla_j Y &= -k_j^k r_k & (c) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $h_{ij} = -\partial_i r \partial_j X = X \nabla_j r_i$, $k_{ij} = -\partial_i r \partial_j Y = Y \nabla_j r_i$.

Назовем h_{ij} главным фундаментальным тензором гиперполосы и предположим, что $h = \text{Det} \|h_{ij}\| \neq 0$, $k = \text{Det} \|k_{ij}\| \neq 0$. Из системы (1) можно определить векторные функции r , X и Y , если задан метрический тензор g_{ij} поверхности и тензоры h_{ij} и k_{ij} , удовлетворяющие следующим условиям интегрируемости:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad R_{kji}^l &= 2h_{ij} h_{kl}^l + 2k_{ij} k_{kl}^l, \\ \text{II} \quad \nabla_{[k} h_{j]i} &= 0, \\ \text{III} \quad \nabla_{[k} k_{j]i} &= 0, \\ \text{IV} \quad k_{ij}^m h_{lm} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где R_{kl} есть тензор кривизны внутренней геометрии x_{n-2} . Мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Поверхность x_{n-2} , допускающая двойственную нормализацию в E_n , определяется с точностью до движения, заданием основного тензора своей внутренней римановой связности g_{ij} и тензоров h_{ij} , k_{ij} , удовлетворяющих условиям (2).

Условие (1, b) можно истолковать следующим образом. Если в евклидовом пространстве рассмотрим на гиперсфере s_{n-1} $n-2$ -мерную поверхность Σ_{n-2} , радиус-вектор точки которой $X = X(u^1, \dots, u^{n-2})$, то ее касательная плоскость, определяемая векторами $\partial_i X$, параллельна касательной плоскости x_{n-2} . Такое отображение x_{n-2} на поверхность Σ_{n-2} назовем ее главным сферическим отображением.

Поверхность Σ_{n-2} определяется следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} 1) \quad \nabla_j X_{(i)} &= -\gamma_{ij} X + E_{ij} Y, \\ 2) \quad \nabla_i Y &= -E^i_j X_j, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\gamma_{ij} = X_i X_j = h_i^k h_{kj}$, $E_{ij} = -\partial_i X \partial_j Y = -h_i^k k_{jk}$, первый и второй тензоры гиперповерхности Σ_{n-2} на гиперсфере s_{n-1} , причем скобки вокруг индекса показывают, что ковариантное дифференцирование соответствует внутренней связности Σ_{n-2} . Пользуясь условиями (1), (3), можно получить соотношение

$$\nabla_k h_{i(j)} = 0,$$

которое показывает, что внутренняя геометрия исходной поверхности x_{n-2} сопряжена с внутренней геометрией поверхности Σ_{n-2} относительно h_{ij} . Из (3) известно, что внутренняя связность 1-го и 2-го рода нормализованной гиперполосы сопряжена относительно главного фундаментального тензора h_{ij} . Отсюда вытекает, что геометрия 2-го рода исходной x_{n-2} в E_n совпадает с геометрией ее главного сферического изображения Σ_{n-2} . Составляя условие интегрируемости системы (3)

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad \rho_{kji}^l &= 2\gamma_{i[j} \delta_{k]}^l + 2E_{i[j} E_{k]}^l \\ 2) \quad \nabla_{[k} E_{i)(j)} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

где ρ_{kji}^l есть тензор кривизны внутренней геометрии Σ_{n-2} , получим

Теорему 2. Главный сферический образ Σ_{n-2} определяется с точностью до движения на гиперсфере s_{n-1} заданием тензоров γ_{ij} и E_{ij} , удовлетворяющих условиям (4).

Все сказанное остается в силе для поверхности x_2 , погруженной в пространство E_4 . В этом случае условия (2. IV) показывают, что главные направления тензоров h_{ij} и k_{ij} совпадают. Таким образом, сеть $h_{ij} du^i du^j = 0$, $k_{ij} du^i du^j = 0$ имеет общую биссекторную сеть, которую мы назовем главной сетью x_2 .

Условия (2. I) могут быть упрощены вследствие того, что поверхность двумерна. Произведем в (2. I) свертывание по индексам i и k , и, вводя обозначения тензора Риччи,

$$R_{ij} = R_{hji}.$$

получим соотношение

$$R_{ji} = 2g^{mk} h_{i|j} h_{k|m} + 2g^{mk} k_{i|j} k_{k|m},$$

которое равносильно (2, 1). Это уравнение подвергнем дальнейшему преобразованию. Для этого рассмотрим два взаимных бивектора, связанных соотношением

$$\varepsilon^{jk} \varepsilon_{kl} = \delta_l^j, \quad \varepsilon_{12} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

После этого легко видеть, что

$$2g^{mk} h_{i|j} h_{k|m} = \varepsilon_{jk} g^{km} h_i^s h_{sm} = g_{jm} h_{is} h^{sm} = A g_{ij}$$

$$2g^{mk} k_{i|j} k_{k|m} = \varepsilon_{jk} g^{km} k_i^s k_{sm} = g_{jm} k_{is} k^{sm} = B g_{ij},$$

где

$$A = \frac{1}{2} \varepsilon^{ik} \varepsilon^{jl} h_{ij} h_{kl}, \quad B = \frac{1}{2} \varepsilon^{ik} \varepsilon^{jl} k_{ij} k_{kl}$$

так, что

$$R_{ji} = (A + B) g_{ij}.$$

Так как внутренняя геометрия поверхности x_2 риманова, то ее тензор Риччи имеет вид

$$R_{ji} = K g_{ij}.$$

где K — гауссова кривизна x_2 , вследствие чего получим

$$2K = \varepsilon^{ik} \varepsilon^{jl} (h_{ij} h_{kl} + k_{ij} k_{kl}), \quad \text{или} \quad K (g_{11}g_{22} - g_{12}^2) = \\ = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 + k_{11}k_{22} - k_{12}^2. \quad (*)$$

Имея в виду условия (1. а), последнее соотношение можно записать в следующем виде

$$2K = \varepsilon^{ik} \varepsilon^{jl} \nabla_i r_j \nabla_k r_l. \quad (5)$$

Поставим следующий вопрос: с каким произволом определяется x_2 , нормализованная двойственно в E_1 своим главным сферическим изображением Σ_2 ?

Разрешая уравнения (1. б) относительно r_k , получим

$$r_i = H_i^k X_k, \quad (6)$$

где H_i^k тензор, взаимный тензору h_j^k . Дифференцируя (6) ковариантно во внутренней связности Σ_2 , пользуясь уравнениями (3. 1) и альтернируя, мы придем к следующей системе условий интегрируемости уравнения (6).

$$I. \quad H_{[i}^k \gamma_{j]k} = 0, \quad II. \quad \nabla_{[j} H_{i]}^{(k)} = 0, \quad III. \quad H_{[i}^k E_{j]k} = 0.$$

Условия I, II и III показывают, что тензор

$$H_{ij} = H_i^k \gamma_{jk}$$

симметричен и определяет на Σ_2 кодацциеву сеть, биссекторная сеть которой совпадает с биссекторной сетью тензора E_{ij} , т. е. с сетью линий кривизны поверхности Σ_2 .

Вследствие этого H_{ij} можно представить в следующем виде

$$H_{ij} = a\gamma_{ij} + bE_{ij}.$$

Чтобы принять во внимание, что сеть кодацциева, найдем ее чебышевский вектор, используя для этого ее перенормированный тензор

$$*H_{ij} = a\gamma_{ij} + E_{ij}. \quad (7)$$

Взаимный тензор $*H_{ij}$ (² стр. 37).

$$*H^{pq} = \frac{1}{N} \varepsilon^{ip} \varepsilon^{jq} *H_{pq} = \frac{1}{N} \varepsilon^{ip} \varepsilon^{jq} (a\gamma_{ij} + E_{ij}) = \frac{1}{N} (a\gamma^{ij} + \bar{E}^{ij}),$$

где $2N = \varepsilon^{ik} \varepsilon^{jl} *H_{ij} *H_{kl}$, а его ковариантная производная

$$\nabla_k *H_{(ij)(l)} = a_k \gamma_{ij} + \nabla_k E_{(ij)(l)}.$$

Подставляя полученные величины в формулу (² стр. 163)

$$t_k = *H^{pq} \nabla_{[p} *H_{(k)l](q)} + \frac{1}{4} *H^{pq} \nabla_k *H_{pq},$$

получим искомое выражение чебышевского вектора

$$t_k = \frac{1}{N} (a\gamma^{pq} + \bar{E}^{pq}) a_{[p} \gamma_{k]q} + \frac{1}{4} \partial_k \ln N.$$

Для того, чтобы сеть $*H_{ij}$ была кодацциевой, необходимо и достаточно, чтобы ее чебышевский вектор был градиентом, т. е. $\varepsilon^{ik} \nabla_i t_k = 0$, но

$$\nabla_i t_k = \nabla_i \left[\frac{1}{N} (a\gamma^{pq} + \bar{E}^{pq}) a_{[p} \gamma_{k]q} \right] + \frac{1}{4} \nabla_i \partial_k \ln N,$$

откуда

$$\varepsilon^{ik} \nabla_i \left[\frac{1}{N} (a\gamma^{pq} + \bar{E}^{pq}) a_{[p} \gamma_{k]q} \right] = 0. \quad (8)$$

Для a мы получаем дифференциальное уравнение в частных производных 2-го порядка, которое имеет решение, зависящее от двух функций одного аргумента.

Мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. Двойственно нормализованная поверхность x_2 определяется своим главным сферическим отображением Σ_2 и заданием сети $*H_{ij}$, удовлетворяющей условиям (7) и (8).

Но так как произвольная x_2 на гиперсфере зависит от одной функции двух аргументов, то получим

Теорема 4. Множества двойственно нормализованных поверхностей в E_4 зависят от одной произвольной функции двух аргументов и двух функций одного аргумента.

Примем теперь главную сеть за координатную, т. е. положим $h_{12} = k_{12} = g_{12} = 0$. Из основных уравнений получаем

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^1 \partial u^2} = \Gamma_{12}^1 \frac{\partial r}{\partial u^1} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial r}{\partial u^2}. \quad (9)$$

Таким образом, на x_2 можно найти такую главную сеть, приняв которую за координатную, мы получим, что радиус-вектор r будет удовлетворять уравнению Лапласа.

Примем в частности, что эта сеть чебышевская. Для этого необходимо и достаточно выполнение равенства $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0$ (1, стр. 337). Но так как эта сеть ортогональна, то она является декартовой (1, стр. 338). Но действительная декартова сеть существует только на поверхностях, наложимых на плоскость. Таким образом, параметры u^1 , u^2 могут быть преобразованы так, чтобы линейный элемент поверхности принял вид $ds^2 = du^2 + dv^2$. Так, уравнение (9) принимает вид

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} = 0, \text{ откуда } r = a(u) + b(v),$$

где a , b — векторы, зависящие только от u и только от v соответственно. Таким образом, рассматриваемая поверхность есть поверхность переноса. Из условия (2, II, III) получим

$$h_{11} = \varphi(u), \quad h_{22} = \psi(v), \quad k_{11} = \varphi^*(u), \quad k_{22} = \psi^*(v). \quad (10)$$

Но так как внутренняя геометрия нашей поверхности евклидова, то из условий (*) и (10) получим

$$\varphi(u)\psi(v) + \varphi^*(u)\psi^*(v) = 0,$$

отсюда получим, что $\varphi(u) = \lambda\varphi^*(u)$, $\psi^*(v) = -\lambda\psi(v)$, где $\lambda = \text{const.}$

Имея в виду (10) и последние соотношения, получим из (1).

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } \frac{d^2 a}{du^2} = \varphi^*(u)(\lambda X + Y), \quad \text{II. } \frac{d^2 b}{dv^2} = \psi(v)(X - \lambda Y) \\ \text{III. } X_1 = -\varphi(u)a_1, \quad X_2 = -\psi(v)b_2, \quad Y_1 = -\varphi^*(u)a_1, \quad Y_2 = -\psi^*(v)b_2 \end{array} \right\}, \quad (11)$$

где

$$a_1 = \frac{da}{du}, \quad b_2 = \frac{db}{dv}.$$

Дифференцируя (11, I) по u , имея в виду (11, III), получим урав-

$$\frac{d^2 a_1}{du^2} + A(u) \frac{da_1}{du} + B(u) a_1 = 0, \text{ где } A(u) = -\frac{\varphi^{**}(u)}{\varphi^*(u)},$$

$$B(u) = \varphi^*(u)[\lambda\varphi(u) - \varphi^*(u)],$$

нение общее решение которого имеет вид

$$a = c_1 f_1(u) + c_2 f_2(u) + c_3.$$

Можно выбрать начало координат так, чтобы $c_3 = 0$, тогда

$$a = c_1 f_1(u) + c_2 f_2(u), \quad (12)$$

аналогично получим для b выражение

$$b = c_3 f_3(v) + c_4 f_4(v). \quad (12')$$

Но так как

$$a_1^2 = 1, \quad b_2^2 = 1, \quad a_1 b_2 = 0, \quad (13)$$

то из (12) и (12') получим

$$c_1^2 f_1^{12}(u) + 2c_1 c_2 f_1(u) f_2(u) + c_2^2 f_2^{12}(u) = 1$$

$$c_3^2 f_3^{12}(v) + 2c_3 c_4 f_3(v) f_4(v) + c_4^2 f_4^{12}(v) = 1$$

$$c_1 c_3 f_1(u) f_3(v) + c_1 c_4 f_1(u) f_4(v) + c_2 c_3 f_2(u) f_3(v) + c_2 c_4 f_2(u) f_4(v) = 0,$$

откуда

$$c_1^2 = c_2^2 = 1, \quad c_1 c_2 = 0, \quad c_3^2 = c_4^2 = 1, \quad c_3 c_4 = 0$$

$$c_1 c_3 = c_1 c_4 = c_2 c_3 = c_2 c_4 = 0 \quad (14)$$

Таким образом получим, что, если главная сеть x_2 чебышевская, то она является сетью переноса на поверхности, образованной движением кривой (12) по кривой (12'), расположенных в двух вполне ортогональных плоскостях. Условия (14) показывают, что параметры u и v есть длина дуг кривых (12) и (12') соответственно. Из (11) следует, что $\varphi^*(u) = k$, $\psi(v) = k^*$, где кривизны кривых (12) и (12') в общей точке (u, v) .

Казанский государственный университет

им. В. И. Ульянова-Ленина

Ա. Վ. ԶԱՔՄԱՋՅԱՆ

Ավելիության չարածրության երկակի նորմալացված մակերևույթների մասին

Ուսումնասիրության արդյունքում պարզվել է հետևյալը.

1. E_n -ում երկակի նորմալացում թույլատրող x_{n-2} մակերևույթը որոշվում է շարժման ճշտությամբ, երբ տված է իրեն ներքին ուղիղի կապակցությունը g_{ij} և h_{ij} , k_{ij} տենզորները, որոնք բավարարում են (2) պայմանին:

2. Գլխավոր սֆերիկ պատկեր Σ_2 -ը որոշվում է շարժման ճշտությամբ հիպերսֆերայի վրա, երբ տված է γ_{ij} և E_{ij} տենզորները, որոնք բավարարում են (4) պայմանին:

3. Երկակի նորմալացված x_2 մակերևույթը որոշվում է իրեն գլխավոր սֆերիկ արտապատկերմամբ և H_{ij} ցանցով, որը բավարարում է (7) և (8) պայմաններին:

4. E_4 -ում երկակի նորմալացված մակերևույթների բազմությունը կախված է երկու արգումենտի մի կամավոր ֆունկցիայից և մեկ արգումենտի երկու ֆունկցիայից:

5. Եթե գլխավոր ցանց x_2 -ը չերիշխյան է, ապա նա հանդիսանում է տեղափոխման ցանց մակերևույթի վրա, որը ստացվում է (12) կորի շարժումով (12')-կորով, որոնք գտնվում են երկու փոխադարձ իրար լրիվ օրթոգոնալ հարթություններում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. П. Норден. Пространства аффинной связности, Гостехиздат, 1950. ² А. П. Норден. Теория поверхностей, Гостехиздат, 1956. ³ А. В. Чакмазян. ДАН АрмССР, т. XXVIII, № 4 (1959).