ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXVIII 1959 5

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. Л. Абрамян

О кручении круглого цилиндрического стержня, имеющего продольные полости

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном
18. III. 1959)

Для задачи кручения круглого стержня с эксцентричной круглой продольной полостью точное решение впервые было дано Макдональдом ([1]). Решение Макдональда было исправлено и завершено составлением расчетных графиков Е. Вайнелем ([2]).

Кручение круглых стержней с полостями в виде эллипса и квадрата с закругленными углами рассмотрено Д. И. Шерманом ([3,4]) и Ю. А. Амензаде ([5]).

Задачу о кручении круглого стержня со многими, одинаковыми, симметрично расположенными круглыми полостями рассмотрел Кондо ([6,7]).

В настоящей работе рассматривается задача о кручении круглого цилиндрического стержня, имеющего одну центрально расположенную продольную полость круглой формы и несколько полостей в форме кольцевого сектора, симметрично расположенных относительно оси стержня (фиг. 1).

Решение задачи получено методом введения вспомогательных функций, изложенным в работах ([8,9]).

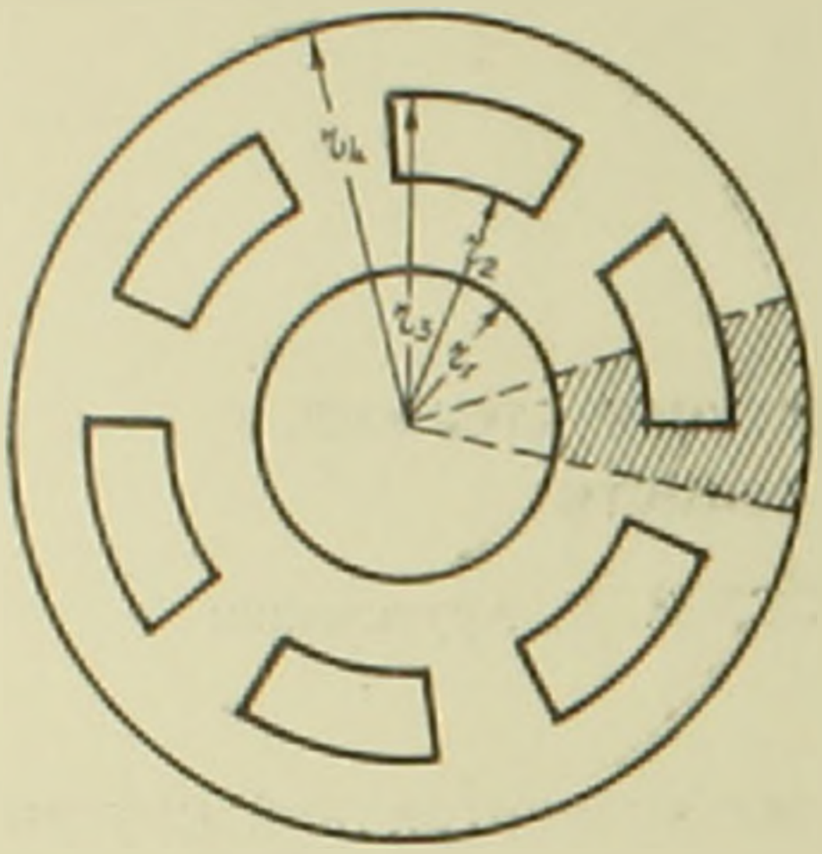
Решение задачи получено в виде рядов. Определение постоянных интегрирования сведено к решению бесконечных систем линейных уравнений. Доказывается, что эти системы вполне регулярны. Приводятся формулы для определения жесткости стержней указанного профиля и подобных стержней, не имеющих центрально расположенной круглой полости.

1. *Постановка задачи.* Определение функции напряжения $U(r, \varphi)$ при кручении стержней с многосвязным поперечным сечением в полярных координатах сводится к интегрированию дифференциального уравнения

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -2 \qquad (1.1)$$

при условии, что функция $U(r, \varphi)$ на контурах поперечного сечения стержня принимает постоянные значения, из коих одно можно выбрать произвольным образом, а остальные должны быть определены при помощи теоремы о циркуляции касательного напряжения при кручении.

При определении функции напряжения $U(r, \varphi)$ для области сечения стержня (фиг. 1) ввиду симметрии области достаточно рассмат-



Фиг. 1.

ривать ее $\frac{1}{2n}$-ую часть, где n—число секториальных отверстий (фиг. 2).

$$n = \frac{\pi}{\varphi_1 + \varphi_2},$$

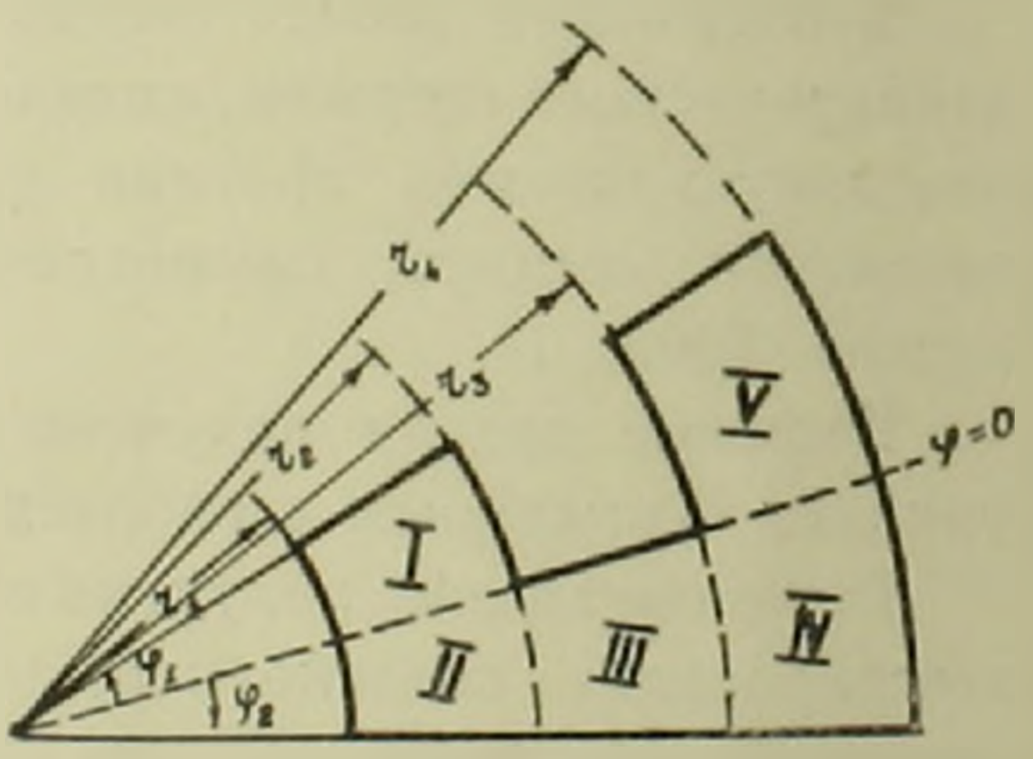
$$\varphi_1 = \frac{\pi}{n\alpha},$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{n}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right), \quad 1 < \alpha < \infty \tag{1.2}$$

где α—число, зависящее от величины секториального отверстия.

Чтобы распространить найденное в этой области решение на всю область сечения стержня, требуем, чтобы на линиях среза ($\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = -\varphi_2$) нормальные производные функции напряжения $U(r, \varphi)$ равнялись нулю.

Решаем задачу при условии, что функция напряжения $U(r, \varphi)$ на контуре кругового отверстия принимает значение U_0, на внешнем контуре сечения принимает значение U_0^*, а на контурах секториальных отверстий равняется нулю.



Фиг. 2

Решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$U(r, \varphi) = \Phi^*(r, \varphi) - \frac{r^2}{2}, \tag{1.3}$$

где $\Phi^*(r, \varphi)$ — гармоническая функция.

В новых координатах t, φ, где

$$t = \ln\frac{r}{r_2}, \quad r = r_2 e^t, \tag{1.4}$$

функция $\Phi^*(r, \varphi) = \Phi(t, \varphi)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{1.5}$$

Функцию $\Phi(t, \varphi)$ ищем в виде

$$\Phi(t, \varphi) = \begin{cases} \Phi_1(t, \varphi) & (-t_1 \leqslant t \leqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1) \\ \Phi_2(t, \varphi) & (-t_1 \leqslant t \leqslant 0,\ -\varphi_2 \leqslant \varphi \leqslant 0) \\ \Phi_3(t, \varphi) & (0 \leqslant t \leqslant t_2,\ -\varphi_2 \leqslant \varphi \leqslant 0) \\ \Phi_4(t, \varphi) & (t_2 \leqslant t \leqslant t_3,\ -\varphi_2 \leqslant \varphi \leqslant 0) \\ \Phi_5(t, \varphi) & (t_2 \leqslant t \leqslant t_3,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1) \end{cases} \tag{1.6}$$

где

$$t_1 = \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad t_2 = \ln \frac{r_3}{r_2}, \quad t_3 = \ln \frac{r_4}{r_2}. \tag{1.7}$$

Вспомогательные функции $\Phi_i(t, \varphi)$ должны удовлетворять следующим граничным условиям сопряжения

$$\Phi_1(0, \varphi) - \frac{r_2^2}{2} = \Phi_3(t, 0) - \frac{r_2^2 e^{2t}}{2} = \Phi_5(t_2, \varphi) - \frac{r_3^2}{2} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}\Big)_{\varphi=\varphi_1} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi}\Big)_{\varphi=-\varphi_2} = \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi}\Big)_{\varphi=-\varphi_2} = \frac{\partial \Phi_4}{\partial \varphi}\Big)_{\varphi=-\varphi_2} = \frac{\partial \Phi_5}{\partial \varphi}\Big)_{\varphi=\varphi_1} = 0,$$

$$\Phi_1(-t_1, \varphi) = \Phi_2(-t_1, \varphi) = \Phi_0, \quad \Phi_4(t_3, \varphi) = \Phi_5(t_3, \varphi) = \Phi_0^*,$$

$$\Phi_1(t, 0) = \Phi_2(t, 0), \quad \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=0} = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=0},$$

$$\Phi_2(0, \varphi) = \Phi_3(0, \varphi), \quad \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial t}\right)_{t=0}, \tag{1.8}$$

$$\Phi_3(t_2, \varphi) = \Phi_4(t_2, \varphi), \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial t}\Big)_{t=t_2} = \frac{\partial \Phi_4}{\partial t}\Big)_{t=t_2},$$

$$\Phi_4(t, 0) = \Phi_5(t, 0), \quad \frac{\partial \Phi_4}{\partial \varphi}\Big)_{\varphi=0} = \frac{\partial \Phi_5}{\partial \varphi}\Big)_{\varphi=0},$$

где

$$\Phi_0 = U_0 + \frac{r_1^2}{2}, \quad \Phi_0^* = U_0^* + \frac{r_4^2}{2}. \tag{1.9}$$

2. *Определение функции напряжения.* Решая уравнение (1.5) и удовлетворив условиям (1.8), для функций $\Phi_i(t, \varphi)$ получим слелующие значения:

$$\Phi_1(t, \varphi) = \frac{r_2^2}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sh}\alpha_k(t_1 + t)}{\alpha_k \mathrm{sh}\alpha_k t_1} \sin\alpha_k\varphi - \frac{2\Phi_0}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sh}\alpha_k t}{\alpha_k \mathrm{sh}\alpha_k t_1} \sin\alpha_k\varphi +$$

$$+ \frac{m}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{\mathrm{ch}\beta_k(\varphi_1 - \varphi)}{\beta_k \mathrm{ch}\beta_k\varphi_1} \sin\beta_k t \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1,\ -t_1 \leqslant t \leqslant 0) \tag{2.1}$$

$$\Phi_2(t,\varphi)=\frac{1}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{\mathrm{sh}\lambda_k(t_1+t)}{\lambda_k\mathrm{sh}\lambda_k t_1}\sin\lambda_k\varphi+\frac{2\Phi_0}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\lambda_k t}{\lambda_k\mathrm{sh}\lambda_k t_1}\sin\lambda_k\varphi+$$

$$+\frac{m}{t_1}\sum_{k=1}^{\infty}A_k\frac{\mathrm{ch}\beta_k(\varphi+\varphi_2)}{\beta_k\mathrm{ch}\beta_k\varphi_2}\sin\beta_k t\quad(-\varphi_2\leqslant\varphi\leqslant 0,\ -t_1\leqslant t\leqslant 0)\qquad(2.2)$$

$$\Phi_3(t,\varphi)=\frac{1}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}C_k\frac{\mathrm{sh}\lambda_k t}{\lambda_k\mathrm{sh}\lambda_k t_2}\sin\lambda_k\varphi-\frac{2\Phi_0^*}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\lambda_k t}{\lambda_k\mathrm{sh}\lambda_k t_3}\sin\lambda_k\varphi-$$

$$-\frac{1}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{\mathrm{sh}\lambda_k(t_2-t)}{\lambda_k\mathrm{sh}\lambda_k t_2}\sin\lambda_k\varphi+\qquad(2.3)$$

$$+\frac{r_2^2}{t_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k\sin\gamma_k t}{4+\gamma_k^2}\left[1+(-1)^{k+1}e^{2t_2}\right]\frac{\mathrm{ch}\gamma_k(\varphi+\varphi_2)}{\mathrm{ch}\gamma_k\varphi_2}$$

$$(-\varphi_2\leqslant\varphi\leqslant 0,\ 0\leqslant t\leqslant t_2)$$

$$\Phi_4(t,\varphi)=\frac{1}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}C_k\frac{\mathrm{sh}\lambda_k(t_3-t)}{\lambda_k\mathrm{sh}\lambda_k(t_3-t_2)}\sin\lambda_k\varphi-$$

$$-\frac{2\Phi_0^*}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\lambda_k t}{\lambda_k\mathrm{sh}\lambda_k t_3}\sin\lambda_k\varphi-\qquad(2.4)$$

$$-\frac{m}{t_3-t_2}\sum_{k=1}^{\infty}D_k\frac{\mathrm{ch}\mu_k(\varphi+\varphi_2)}{\mu_k\mathrm{ch}\mu_k\varphi_2}\sin\mu_k(t-t_2)\quad(-\varphi_2\leqslant\varphi\leqslant 0,\ t_2\leqslant t\leqslant t_3)$$

$$\Phi_5(t,\varphi)=-\frac{2\Phi_0^*}{\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\alpha_k(t_2-t)}{\alpha_k\mathrm{sh}\alpha_k(t_3-t_2)}\sin\alpha_k\varphi+$$

$$+\frac{r_3^2}{\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\alpha_k(t_3-t)}{\alpha_k\mathrm{sh}\alpha_k(t_3-t_2)}\sin\alpha_k\varphi-\qquad(2.5)$$

$$-\frac{m}{t_3-t_2}\sum_{k=1}^{\infty}D_k\frac{\mathrm{ch}\mu_k(\varphi_1-\varphi)}{\mu_k\mathrm{ch}\mu_k\varphi_1}\sin\mu_k(t-t_2)\quad(0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_1,\quad t_2<t<t_3),$$

где

$$\alpha_k=\frac{(2k-1)\pi}{2\varphi_1},\quad\lambda_k=\frac{(2k-1)\pi}{2\varphi_2},\quad\beta_k=\frac{k\pi}{t_1},\quad\gamma_k=\frac{k\pi}{t_2},$$

$$\mu_k = \frac{k\pi}{t_3 - t_2}, \tag{2.6}$$

m — произвольное число, подлежащее определению в дальнейшем.

Неизвестные коэффициенты A_k, B_k, C_k и D_k определяются из следующей совокупности бесконечных систем линейных уравнений

$$\begin{aligned}
B_k &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} A_p + \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} D_p + M_k, \\
C_k &= \sum_{p=1}^{\infty} c_{kp} A_p + \sum_{p=1}^{\infty} d_{kp} D_p + N_k, \\
A_k &= \sum_{p=1}^{\infty} g_{kp} B_p + Q_k, \\
D_k &= \sum_{p=1}^{\infty} q_{kp} C_p + P_k,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$\begin{aligned}
a_{kp} &= \frac{2m\lambda_k}{t_1(\mathrm{cth}\lambda_k t_1 + \mathrm{cth}\lambda_k t_3)(\beta_p^2 + \lambda_k^2)}, \\
b_{kp} &= \frac{2m\lambda_k \mathrm{sh}\lambda_k (t_3 - t_2)}{(t_3 - t_2)(\mathrm{cth}\lambda_k t_1 + \mathrm{cth}\lambda_k t_3)\mathrm{sh}\lambda_k t_3 (\mu_p^2 + \lambda_k^2)}, \\
c_{kp} &= \frac{2m\lambda_k \mathrm{sh}\lambda_k (t_3 - t_2)}{t_1(\mathrm{cth}\lambda_k t_1 + \mathrm{cth}\lambda_k t_3)\mathrm{sh}\lambda_k t_3 (\beta_p^2 + \lambda_k^2)},
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
d_{kp} &= \frac{2m\lambda_k \mathrm{sh}\lambda_k (t_3 - t_2)\mathrm{sh}\lambda_k (t_1 + t_2)}{(t_3 - t_2)(\mathrm{cth}\lambda_k t_1 + \mathrm{cth}\lambda_k t_3)\mathrm{sh}\lambda_k t_3 \mathrm{sh}\lambda_k t_1 (\mu_p^2 + \lambda_k^2)}, \\
g_{kp} &= \frac{2\beta_k}{m\varphi_2(\mathrm{th}\beta_k \varphi_1 + \mathrm{th}\beta_k \varphi_2)(\lambda_p^2 + \beta_k^2)}, \\
q_{kp} &= \frac{2\mu_k}{m\varphi_2(\mathrm{th}\mu_k \varphi_1 + \mathrm{th}\mu_k \varphi_2)(\lambda_p^2 + \mu_k^2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_k = -\frac{\lambda_k}{(\lambda_k^2 - 4)(\mathrm{cth}\lambda_k t_1 + \mathrm{cth}\lambda_k t_3)} \Big\{ & r_2^2 (\lambda_k \mathrm{cth}\lambda_k t_2 - 2\mathrm{cth}2t_2) + \\
& + r_3^2 \left(\frac{2}{\mathrm{sh}2t_2} - \frac{\lambda_k}{\mathrm{sh}\lambda_k t_2} \right) + \frac{\mathrm{sh}\lambda_k (t_3 - t_2)}{\mathrm{sh}\lambda_k t_3} \Big[r_3^2 (\lambda_k \mathrm{cth}\lambda_k t_2 - \\
& - 2\mathrm{cth}2t_2) + r_2^2 \left(\frac{2}{\mathrm{sh}2t_2} - \frac{\lambda_k}{\mathrm{sh}\lambda_k t_2} \right) \Big] + \frac{2(\lambda_k^2 - 4)}{\lambda_k} \left(\frac{\Phi_0}{\mathrm{sh}\lambda_k t_1} + \frac{\Phi_0^*}{\mathrm{sh}\lambda_k t_3} \right) \Big\},
\end{aligned}$$

$$N_k = -\frac{\lambda_k}{(\lambda_k^2-4)\,(\mathrm{cth}\lambda_k t_1 + \mathrm{cth}\lambda_k t_3)}\Big\{r_2^2\,(\lambda_k \mathrm{cth}\lambda_k t_2 - 2\mathrm{cth}2t_2) +$$

$$+ r_3^2\left(\frac{2}{\mathrm{sh}2t_2} - \frac{\lambda_k}{\mathrm{sh}\lambda_k t_2}\right) + \frac{\mathrm{sh}\lambda_k\,(t_1+t_2)}{\mathrm{sh}\lambda_k t_1}\Big[r_3^2\,(\lambda_k \mathrm{cth}\lambda_k t_2 - 2\mathrm{cth}2t_2) +$$

$$+ r_2^2\left(\frac{2}{\mathrm{sh}2t_2} - \frac{\lambda_k}{\mathrm{sh}\lambda_k t_2}\right)\Big] + \frac{2(\lambda_k^2-4)}{\lambda_k}\left(\frac{\Phi_0}{\mathrm{sh}\lambda_k t_1} + \frac{\Phi_0^*}{\mathrm{sh}\lambda_k t_3}\right)\Big\},$$

$$Q_k = \frac{2\Phi_0}{m}(-1)^k - \frac{r_2^2 \mathrm{th}\beta_k\varphi_1}{m\,(\mathrm{th}\beta_k\varphi_1 + \mathrm{th}\beta_k\varphi_2)},$$

$$P_k = \frac{2\Phi_0^*}{m}(-1)^k - \frac{r_3^2 \mathrm{th}\mu_k\varphi_1}{m\,(\mathrm{th}\mu_k\varphi_1 + \mathrm{th}\mu_k\varphi_2} -$$

$$- \frac{4\Phi_0^*\mu_k}{m\varphi_2(\mathrm{th}\mu_k\varphi_1 + \mathrm{th}\mu_k\varphi_2)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sh}\lambda_p t_2}{(\lambda_p^2 + \mu_k^2)\mathrm{sh}\lambda_p t_3}. \qquad (2.9)$$

3. *Исследование совокупности бесконечных систем уравнений* (2.7). При соответствующем выборе постоянного числа m совокупность бесконечных систем (2.7) оказывается вполне регулярной.

Действительно, для суммы модулей коэффициентов систем (2.7) имеют место следующие неравенства:

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| + \sum_{p=1}^{\infty} |b_{kp}| \leqslant \frac{m}{2}\,(1 + e^{-\lambda_1 t_3}),$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} |c_{kp}| + \sum_{p=1}^{\infty} |d_{kp}| \leqslant \frac{m}{2}, \qquad (3.1)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} |g_{kp}| \leqslant \frac{1}{2m}\,(1 + e^{-2\beta_1\varphi_1}),$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} |q_{kp}| \leqslant \frac{1}{2m}\,(1 + e^{-2\mu_1\varphi_1}).$$

Положим для определенности, что $t_1 > t_3 - t_2$ или $\beta_1 < \mu_1$.

Тогда, выбирая m из равенства

$$\frac{1}{m}\,(1 + e^{-2\beta_1\varphi_1}) = m\,(1 + e^{-\lambda_1 t_3}) \qquad (3.2)$$

будем иметь

$$m = \sqrt{\frac{1 + e^{-2\beta_1\varphi_1}}{1 + e^{-\lambda_1 t_3}}}. \qquad (3.3)$$

Подставляя это значение в (3.1), мы увидим, что системы (2.7) вполне регулярны.

Системы (2.7) оказываются по оценкам (3.1) регулярными только в том случае, когда секториальные отверстия исчезают ($t_2=0$ и $\varphi_1=0$) Однако в этом случае из систем неизвестные коэффициенты определяются непосредственно.

4. *Определение постоянных* Φ_0 *и* Φ_0^*. Для определения постоянных Φ_0 и Φ_0^* пользуемся теоремой о циркуляции касательного напряжения при кручении, применив ее к контурам внешнего и внутреннего кругов.

Эти соотношения приводятся к виду

$$\int_{-\varphi_2}^{0}\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}\right)_{t=-t_1}d\varphi+\int_{0}^{\varphi_1}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}\right)_{t=-t_1}d\varphi=0, \tag{4.1}$$

$$\int_{-\varphi_2}^{0}\left(\frac{\partial\Phi_4}{\partial t}\right)_{t=t_3}d\varphi+\int_{0}^{\varphi_1}\left(\frac{\partial\Phi_5}{\partial t}\right)_{t=t_3}d\varphi=0. \tag{4.2}$$

Пользуясь выражениями (2.1)—(2.5), преобразуя их и произведя в (4.1) и (4.2) интегрирование, получим два соотношения, связывающие постоянные Φ_0 и Φ_0^* с коэффициентами B_k и C_k.

Неизвестные B_k и C_k, входящие в эти соотношения, выражаются через Φ_0 и Φ_0^*. Решая эти соотношения относительно Φ_0 и Φ_0^*, получим их значения.

5. *Определение жесткости при кручении.* Жесткость при кручении стержня рассмотренного профиля (фиг. 1) определяется формулой

$$C=2G\left\{-U_0^*\Omega_0^*+U_0\Omega_0+\iint_{\Omega}U\,d\Omega\right\}, \tag{5.1}$$

где Ω—область сечения стержня,

$$\Omega_0^*=\pi r_4^2,\quad \Omega_0=\pi r_1^2. \tag{5.2}$$

Переходя к функции $\Phi(t,\varphi)$, из (5.1) получим

$$C=2G\left\{-\pi(\Phi_0^*r_4^2-\Phi_0r_1^2)+\frac{\pi}{4}(r_4^4-r_1^4)+\right.$$
$$\left.+\frac{n\varphi_1}{4}(r_3^4-r_2^4)+2nr_2^2\iint_{\Omega^*}\Phi(t,\varphi)\,e^{2t}\,dtd\varphi\right\}, \tag{5.3}$$

где $\Omega^*-\frac{1}{2n}$-ая часть области сечения.

Пользуясь выражениями (2.1)—(2.5), согласно (5.3) получим

$$C=2G\left\{-\pi(\Phi_0^*r_4^2-\Phi_0r_1^2)+\frac{\pi}{4}(r_4^4-r_1^4)+\frac{n\varphi_1}{4}(r_3^4-r_2^4)+\right.$$

$$+2n\left[\frac{2}{\varphi_1}(r_2^4-r_3^4+2r_4^2\Phi_0^*-2r_1^2\Phi_0)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k^2(4-\alpha_k^2)}-\right.$$

$$-\frac{r_2^4+2r_1^2\Phi_0}{\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{cth}\alpha_k t_1}{\alpha_k(4-\alpha_k^2)}-\frac{r_3^4+2r_4^2\Phi_0^*}{\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{cth}\alpha_k(t_3-t_2)}{\alpha_k(4-\alpha_k^2)}+$$

$$+\frac{r_2^2(r_1^2+2\Phi_0)}{\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k(4-\alpha_k^2)\mathrm{sh}\alpha_k t_1}+$$

$$+\frac{r_3^2(r_4^2+2\Phi_0^*)}{\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k(4-\alpha_k^2)\mathrm{sh}\alpha_k(t_3-t_2)}+$$

$$+\frac{4(\Phi_0^*r_4^2-\Phi_0r_1^2)}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2(4-\lambda_k^2)}+\frac{2r_2^2\Phi_0}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k(4-\lambda_k^2)\mathrm{sh}\lambda_k t_1}-$$

$$-\frac{2r_1^2\Phi_0}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{cth}\lambda_k t_1}{\lambda_k(4-\lambda_k^2)}-$$

$$-\frac{2r_4^2\Phi_0^*}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{cth}\lambda_k t_3}{\lambda_k(4-\lambda_k^2)}+\frac{2r_2^2\Phi_0^*}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k(4-\lambda_k^2)\mathrm{sh}\lambda_k t_3}+$$

$$+\frac{r_2^4}{t_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k\mathrm{th}\gamma_k\varphi_2}{(4+\gamma_k^2)^2}[1+(-1)^{k+1}e^{2t_2}]^2-$$

$$-\frac{mr_2^2}{t_1}\sum_{k=1}^{\infty}A_k\frac{\mathrm{th}\beta_k\varphi_1+\mathrm{th}\beta_k\varphi_2}{\beta_k(4+\beta_k^2)}[1+(-1)^{k+1}e^{-2t_1}]-$$

$$-\frac{mr_2^2}{t_3-t_2}\sum_{k=1}^{\infty}D_k\frac{\mathrm{th}\mu_k\varphi_1+\mathrm{th}\mu_k\varphi_2}{\mu_k(4+\mu_k^2)}[e^{2t_2}+(-1)^{k+1}e^{2t_3}]+$$

$$+\frac{r_2^2}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k(\mathrm{cth}\lambda_k t_1-\mathrm{cth}\lambda_k t_2)}{\lambda_k(4-\lambda_k^2)}+\frac{1}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{\lambda_k(4-\lambda_k^2)}\left(\frac{r_3^2}{\mathrm{sh}\lambda_k t_2}-\frac{r_1^2}{\mathrm{sh}\lambda_k t_1}\right)-$$

$$-\frac{r_4^2}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k}{\lambda_k(4-\lambda_k^2)\mathrm{sh}\lambda_k(t_3-t_2)}-\frac{r_2^2}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k}{\lambda_k(4-\lambda_k^2)\mathrm{sh}\lambda_k t_2}+$$

$$\left.\left.+\frac{r_3^2}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k}{\lambda_k(4-\lambda_k^2)}[\mathrm{cth}\lambda_k t_2+\mathrm{cth}\lambda_k(t_3-t_2)]\right]\right\}. \qquad (5.4)$$

Из выражения (5.4), положив

$$t_1 = \infty, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{t_1} = z, \quad \frac{\pi}{t_1} = dz, \quad r_1 = 0, \quad A_k = A(z) \qquad (5.5)$$

и переходя к пределу, для определения жесткости круглого цилиндрического стержня с секториальными отверстиями (фиг. 3) получим следующую формулу:

$$C = 2G\left\{\frac{\pi r_4^4}{4} - \pi r_4^2 \Phi_0^* + \frac{n\varphi_1}{4}(r_3^4 - r_2^4) + \right.$$

$$+ 2n\left[\frac{2}{\varphi_1}(r_2^4 + 2r_4^2\Phi_0^* - r_3^4)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k^2(4-\alpha_k^2)} - \frac{r_2^4}{\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k(4-\alpha_k^2)} - \right.$$

$$- \frac{r_3^4 + 2r_4^2\Phi_0^*}{\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{cth}\alpha_k(t_3-t_2)}{\alpha_k(4-\alpha_k^2)} + \frac{4\Phi_0^* r_4^2}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2(4-\lambda_k^2)} +$$

$$+ \frac{r_3^2(r_4^2 + 2\Phi_0^*)}{\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k(4-\alpha_k^2)\operatorname{sh}\alpha_k(t_3-t_2)}$$

$$- \frac{2r_4^2\Phi_0^*}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{cth}\lambda_k t_3}{\lambda_k(4-\lambda_k^2)} + \frac{2r_2^2\Phi_0^*}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k(4-\lambda_k^2)\operatorname{sh}\lambda_k t_3} +$$

$$+ \frac{r_2^4}{t_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k \operatorname{th}\gamma_k\varphi_2}{(4+\gamma_k^2)^2}[1 + (-1)^{k+1}e^{2t_2}]^2 -$$

$$- \frac{mr_2^2}{t_3 - t_2}\sum_{k=1}^{\infty}D_k\frac{\operatorname{th}\mu_k\varphi_1 + \operatorname{th}\mu_k\varphi_2}{\mu_k(4+\mu_k^2)}[e^{2t_2} + (-1)^{k+1}e^{2t_1}] -$$

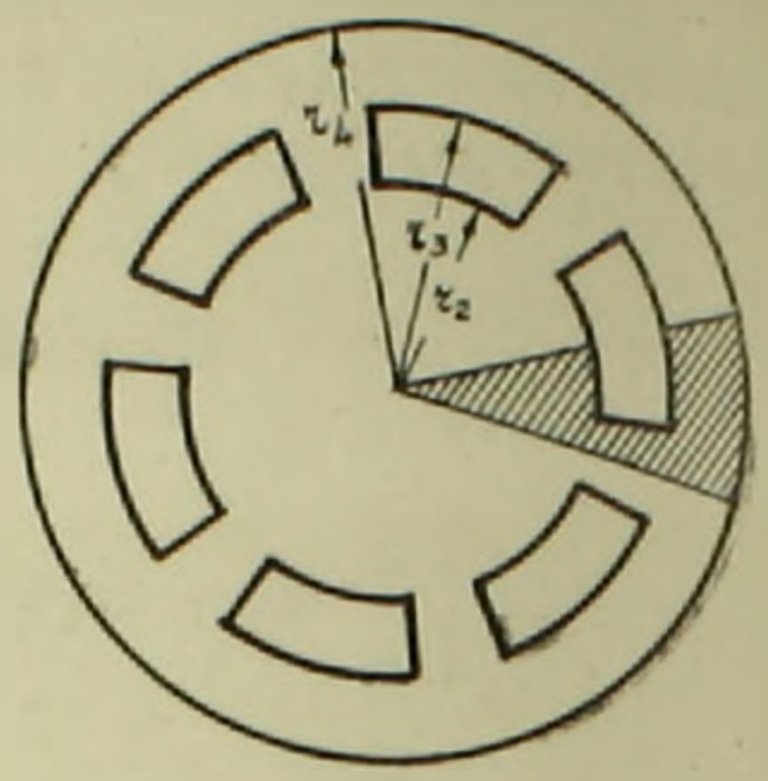
$$- \frac{mr_2^2}{\pi}\int_0^{\infty}A(z)\frac{\operatorname{th}z\varphi_1 + \operatorname{th}z\varphi_2}{z(4+z^2)}dz +$$

$$+ \frac{r_2^2}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{\lambda_k(4-\lambda_k^2)}(1 - \operatorname{cth}\lambda_k t_2) + \frac{r_3^2}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{\lambda_k(4-\lambda_k^2)\operatorname{sh}\lambda_k t_2} -$$

$$- \frac{r_4^2}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k}{\lambda_k(4-\lambda_k^2)\operatorname{sh}\lambda_k(t_3-t_2)} - \frac{r_2^2}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k}{\lambda_k(4-\lambda_k^2)\operatorname{sh}\lambda_k t_2} +$$

$$+\frac{r_3^2}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k}{\lambda_k(4-\lambda_k^2)}\left[\operatorname{cth}\lambda_k t_2+\operatorname{cth}\lambda_k(t_3-t_2)\right]\Bigg\}. \tag{5.6}$$

где коэффициенты интегрирования $A(z)$, B_k, C_k и D_k определяются из систем, получаемых из (2.7) соответствующим предельным переходом.



Фиг. 3.

Из выражения (5.6), положив $t_2=0$ и $\varphi_1=0$ ($\gamma_k=\infty$, $a_k=\infty$ и $r_3=r_2$), а также пользуясь для этого случая значениями

$$B_k=C_k=-r_2^2,$$

$$D_k=-\frac{r_2^2}{m}\left[1+(-1)^{k+1}\right],$$

$$A(z)=-\frac{r_2^2}{m}.$$

$$\Phi_0^*=\frac{r_2^2}{2} \tag{5.7}$$

и положив далее $t_3=0$ ($\mu_\kappa=\infty$ и $r_4=r_2$), получим формулу для определения жесткости сплошного круглого стержня

$$C=G\left\{\frac{\pi r_2^4}{2}-\pi r_2^4+4n\left[\frac{r_2^4}{\varphi_2}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2(2+\lambda_\kappa)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{r_2^4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{th}z\varphi_2}{z(4+z^2)}\,dz\right]\right\}=G\,\frac{\pi r_2^4}{2}. \tag{5.8}$$

При этом использованы значения

$$n\varphi_2=\pi,$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{th}z\varphi_2}{z(4+z^2)}\,dz=\frac{\pi}{2\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\kappa(2+\lambda_\kappa)}=$$

$$=\frac{1}{4}\left[2\psi\left(\frac{4\varphi_2}{\pi}\right)-\psi\left(\frac{2\varphi_2}{\pi}\right)+C_0\right],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2(2+\lambda_\kappa)}=\frac{\varphi_2}{4\pi}\left[\pi\varphi_2+\psi\left(\frac{2\varphi_2}{\pi}\right)-2\psi\left(\frac{4\varphi_2}{\pi}\right)-C_0\right], \tag{5.9}$$

$$C_0=0{,}5772156649\ldots,$$

где $\psi(z)$—логарифмическая производная гамма-функции.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР
Ереванский государственный университет.

Բ. Լ. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ

Երկայնական խոռոչներ ունեցող կլոր գլանաձև ձողի ոլորման մասին

Ապակենտրոն, շրջանային երկայնական խոռոչներով կլոր սնամեջ ձողի ոլորման խնդրի համար առաջին անգամ ճշգրիտ լուծում տվել է Մակդոնալդը (1)։

Այդ նույն խնդիրը վերջնականորեն լուծել և հասցրել է մինչև հաշվարկային գրաֆիկները Վայնելը (2), որն ուղղել է նաև Մակդոնալդի ավելի վաղ աշխատանքի որոշ թերությունները։

Էլիպսաձև և կլորացրած անկյուններով քառակուսու ձևի խոռոչներով կլոր ձողերի ոլորման խնդիրները դիտարկել են Դ. Ի. Շերմանը (3,4) և Յու. Ա. Ամենզադեն (5)։

Ձողի առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ դասավորված մի շարք շրջանային խոռոչներով կլոր ձողի ոլորման խնդիրը դիտարկել է Կոնդոն (6,7)։

Ներկա աշխատության մեջ դիտարկվում է կենտրոնական դիրք ունեցող մի շրջանային խոռոչով և ձողի առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ դասավորված, օղակային սեկտորի ձևի մի քանի խոռոչներով կլոր գլանաձև ձողի ոլորման խնդիրը։

Խնդրի լուծումն ստացվել է օժանդակ ֆունկցիաների ներմուծման եղանակով, որը շարադրված է (8) և (9) աշխատություններում։

Խնդրի լուծումն ստացվել է շարքերի տեսքով։ Խնդրի լուծման ընթացքում ինտեգրման հաստատունների որոշումը բերվել է գծային անվերջ հավասարումների սիստեմների լուծմանը։ Ապացուցված է, որ այդ սիստեմները լիովին ռեգուլյար են։

Նշված կտրվածքով, ինչպես նաև միայն օղակային սեկտորի տեսքի խոռոչներով կլոր ձողերի կոշտությունները որոշելու համար ստացված են բանաձևեր։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Макдональд,* Cambridge Phil. Soc. Proc. Vol. 8, 62—68, 1893. [2] *Е. Вайнель,* Ingeneur-Archiv, Bd. 3, 67—65, 1932. [3] *Д. И. Шерман,* ДАН СССР, т. 63, № 5, 499—502, (1948). [4] *Д. И. Шерман,* „Известия АН СССР", ОТН, № 7, 969—995 (1951). [5] *Ю. А. Амензаде,* ДАН СССР, т. 119, № 6, 1118—1121 (1958). [6] *М. Кондо,* Trans. Soc. Mech. Eng. Tokyo, 1, 173—183, 1935. [7] *М. Кондо,* Philosophical Mag. (7), Vol. 22, № 151, 1089—1108, 1936. [8] *Н. Х. Арутюнян,* ДАН АрмССР, т. IX, № 2, 67—74 (1948), ПММ, т. XIII, в. 1, 107—112 (1949). [9] *Б. Л. Абрамян,* ДАН АрмССР, т. XXVIII, № 3, 109—116 (1959).