ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXVIII 1959 4

МАТЕМАТИКА

А. В. Чакмазян

Двойственная нормализация

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 27.I. 1959)

Вопрос о нормализации поверхности в проективном пространстве выдвинут и разработан А. П. Норденом ([1,2]).

В случае гиперповерхности соответствующая конфигурация обладает двойственностью, которая, однако, нарушается для поверхностей меньшего числа измерений.

Целью настоящей заметки является построение геометрии 2-го рода поверхностей, размерность которых меньше размерности гиперповерхности. В различных пространствах с фундаментальными группами, являющимися подгруппами группы проективных преобразований, довольно часто встречаются геометрические образы, состоящие из точки и проходящей через эту точку плоскости. Эти образы называют плоскостными элементами. Множество плоскостных элементов, точками которых служат точки m-мерной поверхности, а плоскостями являются p-мерные касательные к поверхности плоскости, причем $p>m$ принято называть полосой. Поверхность при этом называется базисной. Если $p=n-1$, где n число измерений пространства, то полоса называется гиперполосой. Касательную гиперплоскость базисной поверхности назовем главной касательной гиперплоскостью. Обозначим гиперполосу через Γ_m. Назовем характеристическими плоскостями гиперполосы характеристики семейства ее гиперплоскостей. Гиперполоса называется регулярной ([3]), если ее характеристические плоскости не содержат прямых, касательных к базисной поверхности гиперполосы.

Пусть

$$x = x(u', \ldots u^m), \quad \xi = \xi(u', \ldots u^m) \tag{1}$$

параметрические уравнения регулярной гиперполосы. Рассмотрим тензор

$$h_{ij} = -\partial_i x \, \partial_j \xi, \tag{2}$$

который мы назовем главным фундаментальным тензором гиперполосы. Известно из [3], что регулярная гиперполоса характеризуется условием

$$h = \operatorname{Det} \| h_{ij} \| \neq 0, \tag{3}$$

и тогда число измерений характеристической плоскости семейства гиперплоскостей равно $(n - m - 1)$.

Гиперполоса является образом, который сам себе двойственен, причем точке базисной поверхности соответствует главная касательная гиперплоскость, а касательной плоскости T_m соответствует характеристика τ_{n-m-1} семейства главных гиперплоскостей, так как T_m определяется точками x, $x_i = \dfrac{\partial x}{\partial u^i}$, а τ_{n-m-1} определяется гиперплоскостями $\xi, \xi_i = \dfrac{\partial \xi}{\partial u^i}$.

Будем говорить, что гиперполоса Γ_m нормализована двойственно, если она нормализована в смысле А. П. Нордена [1], причем ее нормаль 1-го рода содержит характеристику семейства главных гиперплоскостей. Таким образом, к каждой точке базисной поверхности отнесены два линейных многообразия:

1) нормаль 1-го рода P_{n-m}, проходящая через точку x, но не имеющая других общих точек с касательной плоскостью базисной поверхности и содержащая τ_{n-m-1};

2) нормаль 2-го рода P_{m-1}, расположенная в касательной плоскости, но не проходящая через точку x.

Все общие результаты теории нормализации А. П. Нордена остаются справедливыми и в этом случае. Определим плоскость P_{m-1} m точками

$$y_i = \partial_i x - l_i x \qquad (i = 1, 2, \ldots m), \tag{4}$$

принадлежащими этой плоскости. Плоскость P_{n-m} определим $n - m + 1$ независимыми точками

$$x, X, \underset{s}{X} \ (s = 1, 2, \ldots n - m - 1),$$

где точка X лежит вне главной касательной гиперплоскости, а точки $\underset{s}{X}$ лежат на характеристической плоскости. Согласно определению двойственной нормализации гиперполосы имеем соотношение

$$\xi \underset{s}{X} = 0, \qquad \xi_i \underset{s}{X} = 0. \tag{5}$$

Вследствие того, что точки $x, y_i, X, \underset{s}{X}$ независимы, можно написать разложения

$$\partial_j y_i = l_j y_i + G^k_{ji} y_k + p_{ji} x + h_{ji} X + \overset{s}{h}_{ji} \underset{s}{X}, \tag{6}$$

где $P_{ji}, h_{ji}, \overset{s}{h}_{ji}$ тензоры, а G^{κ}_{ji} являются коэффициентами связности без кручения, которая называется внутренней и не зависит от выбора точек X, $\underset{s}{X}$ и нормирования точек поверхности. Коэффициенты G^{κ}_{ji} используем для ковариантного дифференцирования. При этом условии уравнения ([6]) принимают вид

$$\nabla_j y_i = l_j y_i + P_{ji} x + h_{ji} X + \overset{s}{h}_{ji} \underset{s}{X}. \tag{7}$$

Так как конструкция нормализованной гиперполосы двойственна сама себе, то построения, проделанные для точек гиперполосы и их производных, можно повторить для гиперплоскостей и их производных. Нормаль 2-го рода можно определить проходящими через нее гиперплоскостями Ξ, $\overset{s}{\Xi}$, которые не совпадают с гиперплоскостью ξ. Нормаль 1-го рода можно определить m проходящими через нее гиперплоскостями

$$\eta_i = \partial_i \xi - \lambda_i \xi.$$

Пользуясь этими обозначениями, можно написать разложения

$$\partial_j \eta_j = \lambda_j \eta_i + \Gamma^k_{ji} \eta_k + \pi_{ji} \xi + h_{ji} \Xi + \underset{s}{h}_{ji} \overset{s}{\Xi},$$

где π_{ji}, $h_{ji}, \underset{s}{h}_{ji}$ тензоры. Для этого разложения, повторяя те рассуждения, которые сделаны относительно ([6]), получим

$$\nabla_j \eta_{(i)} = \lambda_j \eta_i + \pi_{ji} \xi + h_{ji} \Xi + \underset{s}{h}_{ji} \overset{s}{\Xi}, \tag{8}$$

причем скобки вокруг индекса показывают, что ковариантное дифференцирование соответствует внутренней связности 2-го рода. Таким образом, на гиперполосе, нормализованной двойственно, возникает вторая внутренняя аффинная связность Γ^{κ}_{ij} без кручения.

Итак, на двойственно нормализованной гиперполосе определяются две внутренние связности 1 и 2-го рода.

Пользуясь условиями (7) и (8), получим из (2)

$$\nabla_k h_{i(j)} = \partial_k h_{ij} - G^m_{ki} h_{mj} - \Gamma^m_{kj} h_{im} = 2\,\omega_k h_{ij}. \tag{9}$$

Соотношение (9) показывает, что внутренние связности 1 и 2-го рода нормализованной гиперполосы сопряжены относительно главного фундаментального тензора гиперполосы.

Рассмотрим гиперполосу Γ_m в K_n, то есть в проективном пространстве с заданным абсолютом Q_{n-1}. Как известно из теории внешней полярной нормализации ([1,2]), внутренняя геометрия любой поверхности совпадает с внутренней геометрией в смысле Гаусса, а нормали 1 и 2-го рода считаются полярно сопряженными относительно абсолюта. Иначе говоря, нормаль 1-го рода вполне ортогональна касательной плоскости Γ_m.

Поставим следующий вопрос: при каком условии гиперполоса допускает двойственную полярную нормализацию относительно абсолюта? Обозначим через X нормированный вектор касательной гиперплоскости гиперполосы, а через $\underset{s}{X}$ $(s=1,\ldots n-m-1)$ векторы точек характеристической плоскости, расположенные на поляре точки x. Точки $x, X, \underset{s}{X}$ определяют P_{n-m}, а точки y_i определяют P_{m-1}. Так как векторы $\underset{s}{X}$ определяют $(n-m-1)$ — направлений характеристической плоскости, проходящей через x, то они удовлетворяют условиям

$$X \underset{s}{X} = 0, \quad \partial_i X \underset{s}{X} = 0. \tag{10}$$

Условия (10) эквивалентны условиям (5).

Для того, чтобы гиперполоса Γ_m допускала двойственную полярную нормализацию, необходимо выполнение условия (10).

Рассмотрим подробнее евклидову двойственную полярную нормализацию гиперполосы. Мы называем пространство евклидовым, если в нем задана проективная метрика нулевой кривизны. Эта метрика определяется абсолютной поверхностью 2-го класса, которая вырождается, сводясь к поверхности второго порядка Q_{n-2} $n-2$ — измерений. Гиперплоскость, содержащую эту поверхность, можно считать бесконечно удаленной, так что группа преобразований, сохраняющих абсолют, будет подгруппой аффинных преобразований.

Предположим, что в евклидовом пространстве задана гиперполоса Γ_m, нормализованная двойственно полярно относительно абсолюта. Из общих свойств двойственно полярной нормализации известно, что нормаль 1-го рода вполне ортогональна касательной плоскости Γ_m. Полярная нормализация относительно абсолюта E_n является частным случаем аффинной нормализации. Чтобы получить систему основных уравнений двойственно нормализованной гиперполосы, допустим, что вектор x находится в декартовом нормировании, так что

$$x\Omega = 1, \tag{*}$$

где Ω ковектор несобственной гиперплоскости. Если продифференцируем (*), то получим

$$\partial_i x\Omega = 0,$$

а это показывает, что нормирование каноническое. Предположим, что вершины нормали 1-го рода лежат в несобственной гиперплоскости так что

$$X\Omega = 0, \quad \underset{s}{X}\Omega = 0$$

n точек $X, \underset{s}{X}, y_i = \partial_i x$ независимы между собой. Запишем разложение

$$
\begin{gathered}
y_i = \partial_i x \\
\nabla_i y_l = h_{jl} X + \overset{s}{h}_{jl} \underset{s}{X} \\
\nabla_i \underset{s}{X} = \overset{t}{\underset{s}{m}}_j \underset{t}{X} + \underset{s}{m}_j X + \underset{s}{n}{}^k_{ij} y_k \qquad (11) \\
\nabla_j X = \overset{t}{m}_j \underset{t}{X} + m_j X + m^k_j y_k,
\end{gathered}
$$

где x — радиус-вектор точки поверхности, а X и $\underset{s}{X}$ $(s = 1, \ldots n - m - 1)$ направляющие векторы нормали 1-го рода. При такой нормализации мы получаем следующую таблицу скалярных произведений

	y_l	X	$\underset{s}{X}$
y_j	g_{ij}	0	0
X	0	1	0
$\underset{t}{X}$	0	0	δ_{st}

где $\delta_{st} = \begin{Bmatrix} 1 \text{ при } t = s \\ 0 \text{ при } t \neq s \end{Bmatrix}$

Дифференцируя соотношение $\underset{s}{X}^2 = 1$, получим $m_j = 0$. Из (10) получим $\overset{s}{m}_j = \underset{s}{m}_j = 0$. Если продифференцировать $X\, y_l = 0$, то получим $m_{ij} = - h_{ij}$. Теперь система (11) принимает следующий вид

$$
\begin{gathered}
\nabla_j x_i = h_{ji} X + \overset{s}{h}_{ji} \underset{s}{X}, \\
\nabla_j \underset{s}{X} = \overset{t}{\underset{s}{m}}_j \underset{t}{X} + \underset{s}{n}{}^k_j y_k, \qquad (12) \\
\nabla_j X = - h^k_j x_k.
\end{gathered}
$$

В заключение рассмотрим случай, когда $m = n - 2$. Тогда (12) принимает следующий вид

$$
\begin{aligned}
&\nabla_j x_i = h_{ji} X + K_{ji} Y, && (a) \\
&\nabla_j X = - h^k_j x_k, && (b) \qquad (13) \\
&\nabla_j Y = - K^k_j x_k, && (c)
\end{aligned}
$$

где $h_{ij} = - \partial_i x\, \partial_j X = X \nabla_j x_i$, $K_{ij} = - \partial_i x\, \partial_j Y = Y \triangle_j x_i$.
Предположим, что $h = \mathrm{Det}\, \| h_{ij} \| \neq 0$ и $K = \mathrm{Det}\, \| K_{ij} \| \neq 0$.
Условия (13) симметричны относительно X и Y, откуда следует, что семейство гиперплоскостей η, ортогональных вектору Y, определяет гиперполосу x, η, которая тоже находится в двойственной нормализации. Больше того, такую же нормализацию мы получим, рассмотрев гиперполосы x, ζ, где $\zeta = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha$, причем $\alpha = \mathrm{const}$. Таким образом, если в пространстве E_n гиперполоса Γ_{n-2} допускает двойственную нормализацию, то она допускает ∞^1 таких нормали-

заций. При $n=3$ базисная поверхность обращается в кривую линию, и мы получим ее двойственную нормализацию, предполагая, что X есть нормальный вектор таких касательных плоскостей этой кривой, характеристики которых совпадают с ее нормалями. Запишем нормальные уравнения двух взаимно перпендикулярных касательных гиперплоскостей

$$X x - p\,(u', \ldots u^{n-2}) = 0$$

$$Y x - q\,(u', \ldots u^{n-2}) = 0,$$

где $p,\ q$ — опорные функции. Продифференцировав эти соотношения, получим

$$p_i = X_i\,x, \quad q_i = X_i\,x.$$

Если умножим (13, b, c) скалярно на x, то получим

$$X_j\,x = -h_j^k\,x x_k,$$

$$Y_i\,x = -K_j^k x x_k.$$

Отсюда $p_j = -h_j^k \rho_k$, $q_j = -K_j^k \rho_k$, где $\rho = \frac{1}{2} x^2$. Предположим, что $p =$ $=$ const, $q =$ const. Тогда получим $h_j^k \rho_k = 0$, $K_j^k \rho_k = 0$, но так как Det $\| h_{ij} \| \neq 0$ и Det $\| K_{ij} \| \neq 0$, то $\rho_k = 0$, т. е. $\rho =$ const. Эти условия показывают, что поверхность лежит на гиперсфере. Таким образом, сферические поверхности допускают двойственную полярную нормализацию относительно абсолюта E_n. Кроме этого, существуют частные решения задачи при переменных p и q, которые будут рассмотрены в другой работе.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Ա. Վ. ՉԱՔՄԱՉՅԱՆ

Երկակի նորմալացում

Այս հաղորդման նպատակն է կառուցել 2-րդ կարգի երկրաչափություն այնպիսի մակերևույթների, որոնց չափողականությունը փոքր է հիպերմակերևույթի չափողականությունից: Ներմուծվում է կանոնավոր հիպերշերտի գաղափարը: Կասենք, որ Γ_m հիպերշերտը նորմալացված է երկակի, եթե նա նորմալացված է Ա. Պ. Նորդենի իմաստով (1). Ընդ որում նրա առաջին կարգի նորմալը պարունակում է գլխավոր հիպերհարթությունների ընտանիքի խարակտերիստիկը:

Այսպիսով, բազիսային մակերևույթի ամեն մի կետին վերագրված է երկու գծային բազմաձևություն:

1. Առաջին կարգի P_{n-m} նորմալը, որն անցնում է x կետով, բայց չունի ուրիշ ընդհանուր կետ բազիսային մակերևույթի շոշափող հարթության հետ և պարունակում է Ξ_{n-m-1}-ը:

2. 2-րդ կարգի P_{m-1} նորմալը, որը գտնվում է շոշափող հարթությունում, բայց չի անցնում x կետով:

Ներկա աշխատության մեջ պարզվել է, որ երկակի նորմալացված հիպերշերտի վրա որոշվում է երկու ներքին աֆինական կապակցություն առանց ոլորման: Ապացուցված է, որ այդ կապակցությունները համարժեք են գլխավոր հիմքով h_{ij} տենզորի նկատմամբ: Որպեսզի Γ_m հիպերշերտը թույլատրի երկակի Q_{m-1} բևեռային նորմալացում աբսոլյուտի նկատմամբ, անհրաժեշտ է, որ տեղի ունենա (10) պայմանը:

Մանրամասն հետազոտված է հիպերշերտի բևեռային երկակի նորմալացումը E_n-ի աբսոլյուտի նկատմամբ: Երբ $m=n-2$, ստացված է, որ սֆերիկական մակերևույթները թույլատրում են երկակի բևեռային նորմալացում E_n աբսոլյուտի նկատմամբ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. П. Норден*, Пространства аффинной связности, Гостехиздат, 1950. [2] *А. П. Норден*, Аффинная связность на поверхностях проективного пространства, Мат. сборник, т. 20 (62): 2, 1947. [3] *В. В. Вагнер*, Теория поля локальных гиперполос, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. 8, 1950.