ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXVIII 1959 4

МАТЕМАТИКА

А. А. Талалян

О рядах по базисам пространства L_p, универсальных относительно перестановок

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 3. III. 1959)

Пусть $\{f_n(x)\}$ последовательность почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[0,1]$.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{1}$$

называется универсальным, если для любой измеримой функции*, определенной на $[0,1]$, существует последовательность возрастающих натуральных чисел $\{n_k\}$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} S_{n_k}(x) = f(x) \tag{2}$$

почти всюду на $[0,1]$, где

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{3}$$

Существование универсальных тригонометрических рядов было доказано в работах [1,2].

В работе [3] было доказано существование универсального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

для любой полной ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$.

При этом

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

относительно этой теоремы см. также [4]).

Аналогично приведенному определению универсального ряда в обычном смысле можно давать также следующие определения:

* $f(x)$ может равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры.

Определение 1. Ряд (1) почти везде конечных измеримых функций называется универсальным относительно перестановок в классе всех измеримых функций в смысле сходимости почти всюду (в смысле сходимости по мере, в смысле суммируемости почти всюду линейным методом T), если для любой измеримой функции $f(x)$* члены ряда (1) можно переставить так, что вновь полученный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{\nu_k}(x) \tag{4}$$

сходится почти всюду на [0,1] (сходится по мере на [0,1], суммируется почти всюду на [0,1] методом T) к функции $f(x)$.

Определение 2. Ряд (1) почти везде конечных измеримых функций называется универсальным относительно подрядов в классе всех измеримых функций в смысле сходимости почти всюду (в смысле сходимости по мере, в смысле суммируемости почти всюду линейным методом T), если для любой измеримой функции $f(x)$ из ряда (1) можно выделить подряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}(x), \quad (n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots), \tag{5}$$

который сходится почти всюду на [0,1] (сходится по мере на [0,1], суммируется почти всюду на [0,1] методом T) к функции $f(x)$.

Можно определить универсальности относительно перестановок и относительно подрядов также в классе почти всюду конечных измеримых функций.

Для этого в определениях 1 и 2-й классы всех измеримых функций заменяются классом почти везде конечных измеримых функций. В. Серпинским был построен пример ряда (1) из непрерывных функций, универсального относительно перестановок в классе почти везде конечных измеримых функций в смысле сходимости почти всюду.

Основной теоремой настоящей работы является

Теорема 1. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ — *нормированный базис в пространстве* $L_p[0,1]$, $p > 1$.

Тогда существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{6}$$

с коэффициентами a_n, *стремящимися к нулю, который универсален одновременно относительно перестановок и относительно подрядов в классе всех измеримых функций в смысле сходимости по мере, т. е.* 1) *для любой измеримой функции* $f(x)$ *члены ряда* (6) *можно переставить так, что вновь полученный ряд*

---

* $f(x)$ может равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\mu_k} \varphi_{\mu_k}(x)$$

сходится по мере на $[0,1]$ *к* $f(x)$

2) *для любой измеримой функции* $f(x)$ *из ряда* (6) *можно выбрать подряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \varphi_{n_k}(x) \quad (n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots),$$

который сходится по мере на $[0,1]$ *к* $f(x)$*.

Возникает вопрос: для каких базисов $\{\varphi_n(x)\}$ можно заменить в теореме 1 сходимость по мере сходимостью почти всюду?

Этот вопрос частично решается для системы Хаара, а именно справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $\{\chi_n(x)\}$ — *ортонормированная система Хаара.*

Тогда существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x), \tag{7}$$

который универсален относительно подрядов в классе почти везде конечных измеримых функций в смысле сходимости почти всюду, т. е. для любой почти везде конечной измеримой функции $f(x)$ *из ряда* (3) *можно выбрать подряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \chi_{n_k}(x) \quad (n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots),$$

который сходится почти всюду к $f(x)$.

Следующие теоремы относятся к общим функциональным рядам, универсальным в обычном смысле и в смысле перестановок. В этих теоремах дается некоторая взаимосвязь между этими универсальностями.

Теорема 3. Если функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

где $f_n(x)$ *почти везде конечные измеримые функции, определенные на* $[0,1]$, *универсален относительно перестановок в классе почти везде конечных измеримых функций в смысле сходимости по мере, то члены этого ряда можно переставить так, что вновь полученный ряд*

* Из второй части теоремы 1 следует теорема 1 работы [6], где доказано, что для любой измеримой функции $f(x)$ существует ряд вида (6), сходящийся к ней по мере на $[0,1]$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{\mu_k}(x)$$

будет универсальным в обычном смысле, т. е. для любой измеримой функции $f(x)$ существует последовательность $k_1 < k_2 < \cdots < k_i < \cdots$ такая, что

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{k_i} f_{\mu_k}(x) = f(x)$$

почти всюду на $[0,1]$.

Теорема 4. *Пусть дан метод Чезаро какого-нибудь положительного порядка.*

Если функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

где $f_n(x)$ почти везде конечные измеримые функции, определенные на $[0,1]$, универсален в обычном смысле и для некоторой последовательности натуральных чисел $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = 0$$

почти всюду на $[0,1]$, то этот ряд будет универсальным относительно перестановок в классе почти везде конечных измеримых функций в смысле суммируемости почти всюду на $[0,1]$ данным методом Чезаро.

Эта теорема доказывается методом Д. Е. Меньшова, приведенном в работе ([7]).

Из теорем 3 и 4 непосредственно следует

Теорема 5. *Пусть дан метод Чезаро какого-нибудь положительного порядка.*

Если функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

где $f_n(x)$ почти везде конечные измеримые функции, определенные на $[0,1]$, универсален относительно перестановок в классе почти везде конечных измеримых функций в смысле сходимости по мере, то он будет универсальным относительно перестановок в классе почти везде конечных измеримых функций в смысле суммируемости почти всюду на $[0,1]$ данным методом Чезаро.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

L_p տարածության բազիսների շարքերի մասին, որոնք ունիվերսալ են տեղափոխությունների նկատմամբ

Ենթադրենք $\{f_n(x)\}$-ը $[0,1]$ հատվածի վրա որոշված համարյա ամենուրեք վերջավոր չափելի ֆունկցիաների հաջորդականություն է։

Մտցվում են հետևյալ երկու սահմանումները՝

Սահմանում 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{1}$$

շարքը կոչվում է տեղափոխությունների նկատմամբ ունիվերսալ բոլոր չափելի ֆունկցիաների դասում համարյա ամենուրեք զուգամիտելու իմաստով (համապատասխանաբար ըստ չափի զուգամիտելու իմաստով, T գծային մեթոդով համարյա ամենուրեք գումարելու իմաստով), եթե կամայական $f(x)$ ֆունկցիայի համար (1) շարքի անդամները կարելի է տեղափոխել այնպես, որ նոր ստացված

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{\nu_k}(x) \tag{2}$$

շարքը զուգամիտի համարյա ամենուրեք (համապատասխանաբար ըստ չափի, T գծային մեթոդով գումարվի համարյա ամենուրեք) դեպի $f(x)$ ֆունկցիան։

Սահմանում 2. (1) շարքը կոչվում է ենթաշարքերի նկատմամբ ունիվերսալ բոլոր չափելի ֆունկցիաների դասում, համարյա ամենուրեք զուգամիտելու իմաստով (համապատասխանաբար ըստ չափի զուգամիտելու իմաստով, T գծային մեթոդով համարյա ամենուրեք գումարելու իմաստով), եթե կամայական $f(x)$ չափելի ֆունկցիայի համար (1) շարքից կարելի է անջատել

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \varphi_{n_k}(x)$$

ենթաշարք, որը զուգամիտում է համարյա ամենուրեք (համապատասխանաբար զուգամիտում է ըստ չափի, T գծային մեթոդով գումարվում է համարյա ամենուրեք) դեպի $f(x)$ ֆունկցիան։

Տեղի ունեն հետևյալ թեորեմները՝

Թեորեմ 1. Ենթադրենք $\{\varphi_n(x)\}$-ը նորմավորված բազիս է $L_p[0,1]$, $p > 1$ տարածության մեջ։

Այդ դեպքում գոյություն ունի

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{3}$$

շարք՝ զերոյի ձգտող գործակիցներով, որը ունիվերսալ է միաժամանակ տեղափոխությունների և ենթաշարքերի նկատմամբ բոլոր չափելի ֆունկցիաների դասում ըստ չափի զուգամիտելու իմաստով, այսինքն

1) կամայական $f(x)$ չափելի ֆունկցիայի համար (3) շարքի անդամները կարելի է տեղափոխել այնպես, որ նոր ստացված

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\mu_k} \varphi_{\mu_k}(x)$$

շարքը $[0,1]$-ի վրա ըստ չափի զուգամիտում է $f(x)$-ին։

2) կամայական $f(x)$ չափելի ֆունկցիայի համար (3) շարքից կարելի է անջատել

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \varphi_{k_k}(x) \quad (n_1 < n_2 < \cdots)$$

ենթաշարքը, որ $[0,1]$-ի վրա ըստ չափի զուգամիտում է $f(x)$-ին։

Հարց է առաջանում ինչպիսի $\{\varphi_n(x)\}$ բազիսների համար կարելի է թեորեմ 1-ում փոխարինել ըստ չափի զուգամիտությունը համարյա ամենուրեք զուգամիտությունով։

Այդ հարցը մասնակի լուծվում է Խարի սիստեմի համար։

Տեղի ունի հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 2. Ենթադրենք $\{\chi_n(x)\}$-ը Խարի օրթոգոնալ սիստեմն է։ Այդ դեպքում գոյություն ունի

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x) \tag{4}$$

շարք, որը ունիվերսալ է ենթաշարքերի նկատմամբ համարյա ամենուրեք վերջավոր չափելի ֆունկցիաների դասում համարյա ամենուրեք զուգամիտելու իմաստով, այսինքն ցանկացած համարյա ամենուրեք վերջավոր $f(x)$ ֆունկցիայի համար (4) շարքից կարելի է ընտրել

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \chi_{n_k}(x)$$

ենթաշարք, որը համարյա ամենուրեք զուգամիտում է $f(x)$-ին։

Տեղի ունեն նաև մի քանի թեորեմներ, որոնք վերաբերվում են տեղափոխությունների նկատմամբ ունիվերսալ և սովորական իմաստով ունիվերսալ ընդհանուր ֆունկցիոնալ շարքերին։

Այդ թեորեմներում հաստատվում է որոշ փոխադարձ կապ այդ երկու տարբեր իմաստով, ունիվերսալությունների միջև։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Д. Е. Меньшов*, Математический сборник, 20 (62):2 (1947). [2] *В. Я. Козлов*, Математический сборник, 26 (68):3 (1950), стр. 351—365. [3] *А. А. Талалян*, „Известия АН АрмССР“ (серия физ.-мат. наук), т. X, № 3 (1957). [4] *С. Качмаж* и *Г. Штейнгауз* Теория ортогональных рядов, стр. 372, 1958. [5] *W. Sierpinski*, Rozpr. Akad. Umiej. LII (1912), cer A. стр 33. [6] *А. А. Талалян*, „Известия АН АрмССР“ (серия физ.-мат. наук), т. X, № 1 (1957). [7] *Д. Е. Меньшов*, ИАН, серия математич. (1937), стр. 203—230.