ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXVIII 1959 3

МАТЕМАТИКА

Р. М. Мартиросян

О полноте решений одного интегро-дифференциального уравнения

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 28. II 1959)

В работе рассматривается вопрос о полноте в $L_2(0, \infty)$ суммируемых с квадратом решений $\psi(x, \lambda_n)$ уравнения

$$\psi''(x, \lambda) + (\lambda - q(x) - r(x))\psi(x, \lambda) + \int_x^\infty T(x, t)\psi(t, \lambda)\,dt = 0 \tag{1}$$

при $\lambda = \lambda_n$ в предположении, что решения $\varphi(x, \lambda_n)$ уравнения

$$\varphi''(x, \lambda) + (\lambda - q(x))\varphi(x, \lambda) = 0 \tag{2}$$

при тех же $\lambda = \lambda_n$ образуют полную систему. Оказывается, что если функции $\varphi(x, \lambda_n)$ образуют полную ортонормальную систему, то к уравнению (1) можно присоединить некоторое неоднородное уравнение того же типа и поставить для нее определенную задачу Коши так, чтобы решения $\chi(x, \lambda_n)$ этой задачи были суммируемы с квадратом на полуоси и дополняли фукции $\psi(x, \lambda_n)$ до полной биортогональной системы. Как следствие получается одно обобщение известной теоремы Мюнца о полноте системы степеней.

Рассматриваемая задача в несколько иной постановке была впервые предложена М. М. Джрбашяном, и ряд интересных результатов по обобщенной задаче Штурма-Лиувилля для интегро-дифференциальных уравнений такого рода был получен А. Б. Нерсесяном ([1]).

В основном результаты получены путем построения соответствующих операторов преобразования, переводящих решения уравнения (2) в решения уравнения (1). Во всем дальнейшем будем предполагать, что $q(x)$—гладкая комплекснозначная функция, а $r(x)$ и $T(x, t)$—гладкие комплекснозначные и финитные функции (т. е. обращаются в нуль вне некоторых компактов), причем $T(x, t)$ задана в угле $0 \leqslant x \leqslant t$. При этом на рост функции $q(x)$ никаких ограничений не накладываем, а значения параметра λ считаем, вообще говоря, комплексными. Переходя к построению указанных операторов преобразования, докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 1. В области $0 \leqslant x \leqslant t$ существует единственное дважды непрерывно дифференцируемое финитное решение уравнения

$$K_{x^2}(x, t) - K_{t^2}(x, t) + (q(t) - q(x) - r(x)) K(x, t) + \\ + T(x, t) + \int_x^t T(x, s) K(s, t)\, ds = 0, \tag{3}$$

удовлетворяющее условию

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^{\infty} r(t)\, dt. \tag{4}$$

Доказательство. С помощью обычной замены переменных $\xi = x + t$, $\eta = x - t$ нетрудно убедиться, что рассматриваемая задача эквивалентна задаче об определении дважды непрерывно-дифференцируемого и финитного решения $u(\xi, \eta)$ уравнения

$$u(\xi, \eta) = - \int_\xi^{\infty} \left\{ \int c(s, t)\, u(s, t)\, dt \right\} ds - \\ - \int_\xi^{\infty} \left\{ \int_\eta^0 T_1(s, t)\, dt \right\} ds + \frac{1}{2} \int_{\frac{\xi}{2}}^{\infty} r(t)\, dt - \\ - \int_\xi^{\infty} \left\{ \int_\eta^0 \left[\int_t^0 T_2(s, t; x)\, u(x + s - t, x)\, dx \right] dt \right\} ds \tag{5}$$

в области $0 \leqslant -\eta \leqslant \xi < \infty$, где положено

$$c(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \left\{ q\left(\frac{\xi - \eta}{2}\right) - q\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) - r\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) \right\},$$

$$T_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} T\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}\right),$$

$$T_2(\xi, \eta; t) = \frac{1}{4} T\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{2t + \xi - \eta}{2}\right).$$

Ясно, что $T_1(\xi, \eta)$ обращается в нуль при достаточно больших ξ и $T_2(\xi, \eta; t)$ обращается в нуль при достаточно больших $\xi + t$.

Предположим N настолько большим, чтобы $r(x) = 0$ при $x \geqslant 2N$, $T_1(\xi, \eta) = 0$ при $\xi \geqslant N$ и $T_2(\xi, \eta; t) = 0$ при $\xi + t \geqslant N$. Далее, пусть

$$|c(s, t) N| \leqslant M \quad (0 \leqslant s \leqslant N, \quad -N \leqslant t \leqslant 0),$$

$$|T_1(s, t)| \leqslant M, \quad |T_2(s, t; x) N^2| \leqslant M, \quad |r(t)| \leqslant 2M.$$

Решая уравнение (5) методом последовательных приближений, положим

$$u_0(\xi,\eta) = -\int\limits_{\xi}^{\infty}\left\{\int\limits_{\eta}^{0} T_1(s,t)\,dt\right\}ds + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\xi}{2}}^{\infty} r(t)\,dt. \tag{6}$$

Далее, n-ое приближение $u_n(\xi,\eta)=0$ при $\xi \geqslant N$, как это видно из (5) и (6), ибо всегда $\xi < x+s-t$. Чтобы оценить $u_n(\xi,\eta)-u_{n-1}(\xi,\eta)$, заметим, что

$$u_n(\xi,\eta)-u_{n-1}(\xi,\eta) = -\int\limits_{\xi}^{\infty}\left\{\int\limits_{\eta}^{0} c(s,t)\,(u_{n-1}(s,t)-u_{n-2}(s,t))\,dt + \right.$$

$$+\int\limits_{\eta}^{0}\left[\int\limits_{s}^{s-t} T_2(s,t;\lambda+t-s)\,(u_{n-1}(\lambda,\lambda+t-s)-\right.$$

$$\left.\left.-u_{n-2}(\lambda,\lambda+t-s))\,d\lambda\right]dt\right\}ds.$$

Отсюда, учитывая вытекающую из (6) оценку $|u_0(\xi,\eta)| \leqslant 2MN^2$, получим без труда

$$|u_n(\xi,\eta)-u_{n-1}(\xi,\eta)| \leqslant 2MN^2\,\frac{(2M)^n(N-\xi)^n}{n!},$$

что и доказывает лемму. Теперь мы в состоянии доказать следующую теорему.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\varphi(x,\lambda)$ *есть произвольное решение уравнения* (2). *Тогда, если* $K(x,t)$ *есть решение задачи* (3)—(4), *то функция*

$$\psi(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) + \int\limits_{x}^{\infty} K(x,t)\,\varphi(t,\lambda)\,dt \tag{7}$$

является решением уравнения (1). *Обратно, всякое решение уравнения* (1) *представимо в виде* (7), *где* $\varphi(x,\lambda)$ *некоторое решение уравнения* (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi(x,\lambda)$ удовлетворяет уравнению (2). Определив отсюда $\lambda\varphi(x,\lambda)$, пользуясь финитностью $K(x,t)$ и дважды интегрируя по частям, находим

$$\lambda\psi(x,\lambda) = \lambda\varphi(x,\lambda) + \int\limits_{x}^{\infty}\{q(t)K(x,t)-K_{t^2}(x,t)\}\,\varphi(t,\lambda)\,dt +$$

$$+K(x,x)\,\varphi'(x,\lambda) - K_t(x,t)|_{t=x}\,\varphi(x,\lambda).$$

Далее, меняя порядок интегрирований, без труда убеждаемся, что

$$\int_x^\infty T(x,t)\psi(t,\lambda)\,dt = \int_x^\infty \left\{ T(x,t) + \int_x^t T(x,s)K(s,t)\,ds \right\} \varphi(t,\lambda)\,dt.$$

Теперь уже нетрудно видеть, что

$$\psi''(x,\lambda) + (\lambda - q(x) - r(x))\psi(x,\lambda) + \int_x^\infty T(x,t)\psi(t,\lambda)\,dt =$$

$$= \int_x^\infty \Big\{ K_{x^2}(x,t) - K_{t^2}(x,t) + (q(t) - q(x) - r(x))K(x,t) +$$

$$+ T(x,t) + \int_x^t T(x,s)K(s,t)\,ds \Big\} \varphi(t,\lambda)\,dt -$$

$$-\left(K_x(x,t)|_{t=x} + K_t(x,t)|_{t=x} + \frac{dK(x,x)}{dx} + r(x)\right)\varphi(x,\lambda).$$

Этим доказана первая часть теоремы. Чтобы доказать вторую часть, обозначим через $R(x,t)$ резольвенту ядра $K(x,t)$. Пусть $\psi(x,\lambda)$ какое-нибудь решение уравнения (1). Положим

$$\varphi(x,\lambda) = \psi(x,\lambda) - \int_x^\infty R(x,t)\psi(t,\lambda)\,dt. \quad (8)$$

Как и выше, нетрудно убедиться прямым вычислением, что

$$\varphi''(x,\lambda) + (\lambda - q(x))\varphi(x,\lambda) = \psi''(x,\lambda) + (\lambda - q(x) - r(x))\psi(x,\lambda) +$$

$$+ \int_x^\infty T(x,t)\psi(t,\lambda)\,dt + \int_x^\infty \Big\{ R_{t^2}(x,t) - R_{x^2}(x,t) + (q(x) -$$

$$- q(t) - r(t))R(x,t) + \int_x^t R(x,s)T(s,t)\,ds - T(x,t) \Big\} \psi(t,\lambda)\,dt +$$

$$+\left(R_t(x,t)|_{t=x} + R_x(x,t)|_{t=x} + \frac{dR(x,x)}{dx} + r(x)\right)\psi(x,\lambda).$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться доказанной ниже леммой 2. Однако, прежде чем перейти к доказательству этой леммы, обозначим через $R(x,t)$ резольвенту ядра $K(x,t)$ и напомним, что имеют место следующие соотношения:

$$R(x,t) = K(x,t) - \int_x^t K(x,s)R(s,t)\,ds,$$

$$R(x,t) = K(x,t) - \int_x^t R(x,s)K(s,t)\,ds. \quad (9)$$

которые показывают, что $R(x, t)$ финитна и дважды непрерывно дифференцируема.

Лемма 2. Резольвента $R(x, t)$ *ядра* $K(x, t)$ *может быть определена как единственное финитное решение уравнения*

$$R_{t^2}(x, t) - R_{x^2}(x, t) + (q(x) - q(t) - r(t)) R(x, t) + \int_x^t R(x, s) T(s, t) \, ds - T(x, t) = 0 \tag{10}$$

в области $0 < x < t$, *удовлетворяющее условию*

$$R(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^{\infty} r(t) \, dt. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x, \lambda)$ произвольное решение уравнения (2). Как мы уже видели, функция $\psi(x, \lambda)$, определенная формулой (7), удовлетворяет уравнению (1), и $\varphi(x, \lambda)$ может быть выражена через $\psi(x, \lambda)$ посредством равенства (8). Отсюда, точно таким же образом, как и при доказательстве теоремы 1, дважды применяя интегрирование по частям и используя финитность $R(x, t)$, а также тождество

$$\int_x^{\infty} R(x, t) \left\{ \int_t^{\infty} T(t, s) \psi(s, \lambda) \, ds \right\} dt = \int_x^{\infty} \left\{ \int_x^t R(x, s) T(s, t) \, ds \right\} \psi(t, \lambda) \, dt,$$

выразим $\lambda\varphi(x, \lambda)$ через $\psi(x, \lambda)$. После этого легко убедиться, что

$$\varphi''(x, \lambda) + (\lambda - q(x)) \varphi(x, \lambda) = \psi''(x, \lambda) + (\lambda - q(x) - r(x)) \psi(x, \lambda) +$$

$$+ \int_x^{\infty} T(x, t) \psi(t, \lambda) \, dt + \int_x^{\infty} \Big\{ R_{t^2}(x, t) - R_{x^2}(x, t) +$$

$$+ (q(x) - q(t) - r(t)) R(x, t) - T(x, t) +$$

$$+ \int_x^t R(x, s) T(s, t) \, ds \Big\} \psi(t, \lambda) \, dt + \Big\{ R_x(x, t)|_{t=x} + R_t(x, t)|_{t=x} +$$

$$+ \frac{dR(x, x)}{dx} + r(x) \Big\} \psi(x, \lambda).$$

Но последняя скобка равна нулю в силу (9) и (4). Учитывая еще, что $\varphi(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$ удовлетворяют уравнениям (2) и (1) соответственно, находим окончательно

$$\int_x^\infty \Big\{ R_{t^2}(x, t) - R_{x^2}(x, t) + (q(x) - q(t) - r(t))\, R(x, t) - T(x, t) +$$

$$+ \int_x^t R(x, s)\, T(s, t)\, ds \Big\}\, \psi(t, \lambda)\, dt = 0.$$

Отсюда следует, что подинтегральная функция тождественно равна нулю. В самом деле, поскольку эта функция финитна, то нам следует лишь доказать, что из условия

$$\int_x^\infty f(t)\, \psi(t, \lambda)\, dt = 0,$$

где $f(t)$ финитна, следует $f(t) \equiv 0$ $(t > x)$. Но в самом деле, подставляя в последнее равенство $\psi(t, \lambda)$ из (7) и меняя порядок интегрирований, будем иметь

$$\int_x^\infty \Big\{ f(t) + \int_x^t K(s, t)\, f(s)\, ds \Big\}\, \varphi(t, \lambda)\, dt = 0.$$

Далее, из финитности $K(x, t)$ следует финитность подинтегральной функции в этом равенстве. Поэтому, заметив, что система всех решений $\varphi(x, \lambda)$ уравнения (2) полна на любом конечном интервале, заключаем отсюда, что подинтегральная функция в последнем равенстве, а следовательно и $f(t)$ тождественно равна нулю.

Для доказательства основной теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $\omega(x, \lambda)$ *некоторое решение уравнения*

$$\omega''(x, \lambda) + (\lambda - \overline{q(x)})\, \omega(x, \lambda) = 0. \tag{12}$$

Тогда оператор преобразования

$$\chi(x, \lambda) = \omega(x, \lambda) - \int_0^x \overline{R(t, x)}\, \omega(t, \lambda)\, dt \tag{13}$$

переводит $\omega(x, \lambda)$ *в решение следующей задачи Коши*

$$\chi''(x, \lambda) + (\lambda - \overline{q(x)} - \overline{r(x)})\, \chi(x, \lambda) + \int_{t_0}^x \overline{T(t, x)}\, \chi(t, \lambda)\, dt =$$

$$= \overline{R_t(0, x)}\, \omega(0, \lambda) - \overline{R(0, x)}\, \omega'(0, \lambda), \tag{14}$$

$$\chi(0, \lambda) = \omega(0, \lambda), \quad \chi'(0, \lambda) = \omega'(0, \lambda) - \frac{\omega(0, \lambda)}{2} \int_0^\infty \overline{r(t)}\, dt. \tag{15}$$

Обратно, если $\chi(x, \lambda)$ есть решение уравнения

$$\chi''(x, \lambda) + (\lambda - \overline{q(x)} - \overline{r(x)})\chi(x, \lambda) + \int_0^x \overline{T(t, x)}\chi(t, \lambda)\, dt =$$

$$= \chi(0, \lambda)\left\{\overline{R_t(0, x)} - \frac{1}{2}\overline{R(0, x)}\int_0^\infty \overline{r(t)}\, dt\right\} - \chi'(0, \lambda)\overline{R(0, x)}, \tag{16}$$

то оператор преобразования

$$\omega(x, \lambda) = \chi(x, \lambda) + \int_0^x \overline{K(t, x)}\chi(t, \lambda)\, dt \tag{17}$$

переводит $\chi(x, \lambda)$ в решение следующей задачи Коши

$$\omega''(x, \lambda) + (\lambda - \overline{q(x)})\omega(x, \lambda) = 0,$$

$$\omega(0, \lambda) = \chi(0, \lambda), \quad \omega'(0, \lambda) = \chi'(0, \lambda) + \frac{\chi(0, \lambda)}{2}\int_0^\infty \overline{r(t)}\, dt.$$

Доказательство. Учитывая очевидное тождество

$$\int_0^x T(t, x)\overline{\chi(t, \lambda)}dt = \int_0^x \left[T(t, x) - \int_t^x R(t, s)\, T(s, x)\, ds\right]\overline{\omega(t, \lambda)}\, dt,$$

совершенно таким же образом, как при доказательстве теоремы 1, найдем

$$\overline{\chi''(x, \lambda)} + (\bar{\lambda} - q(x) - r(x))\overline{\chi(x, \lambda)} + \int_0^x T(t, x)\overline{\chi(t, \lambda)}\, dt =$$

$$= \int_0^x \left\{R_{tt}(t, x) - R_{xx}(t, x) + (q(x) + r(x) - q(t))R(t, x) + \right.$$

$$\left. + T(t, x) - \int_t^x R(t, s)\, T(s, x)\, ds\right\}\overline{\omega(t, \lambda)}\, dt +$$

$$+ R_t(0, x)\overline{\omega(0, \lambda)} - R(0, x)\overline{\omega'(0, \lambda)} - \left[R_x(t, x)_{t=x} + \right.$$

$$\left. + R_t(t, x)_{t=x} + \frac{dR(x, x)}{dx} + r(x)\right]\overline{\omega(x, \lambda)}.$$

Отсюда и следует, в силу леммы 2, что $\chi(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (14). Условия (15) следуют из (11). Пусть теперь $\chi(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (16). Тогда аналогичные выкладки показывают, что для $\omega(x, \lambda)$, определенного формулой (17), выполняется равенство

$$\omega''(x,\lambda) + (\lambda - \overline{q(x)})\,\omega(x,\lambda) = \chi''(x,\lambda) + (\lambda - \overline{q(x)} - \overline{r(x)})\,\chi(x,\lambda) +$$

$$+ \int_0^x \overline{T(t,x)}\,\chi(t,\lambda)\,dt + \int_0^x \Big\{ \overline{K_{x^2}(t,x)} - \overline{K_{t^2}(t,x)} + (\overline{q(t)} + \overline{r(t)} -$$

$$- \overline{q(x)})\,\overline{K(t,x)} - \int_t^x \overline{T(t,s)}\;\overline{K(s,x)}\,ds - \overline{T(t,x)} \Big\} \chi(t,\lambda)\,dt +$$

$$+ \left(\overline{K_t(t,x)}_{|t=x} + \overline{K_x(t,x)}_{|t=x} + \frac{d\overline{K(x,x)}}{dx} + \overline{r(x)} \right) \chi(x,\lambda) +$$

$$+ \chi(0,\lambda) \Big\{ -\overline{K_t(0,x)} + \int_0^x \overline{K(t,x)} \Big\{ \overline{R_s(0,t)} -$$

$$- \frac{1}{2}\,\overline{R(0,t)} \int_0^\infty \overline{r(t)}\,dt \Big\} dt \Big\} + \chi'(0,\lambda) \Big\{ \overline{K(0,x)} -$$

$$- \int_0^x \overline{K(t,x)}\;\overline{R(0,t)}\,dt \Big\}.$$

Отсюда легко видеть, что лемма будет доказана, если мы обнаружим, что

$$\overline{R_t(0,x)} - \frac{1}{2}\,\overline{R(0,x)} \int_0^\infty \overline{r(t)}\,dt - \overline{K_t(0,x)} +$$

$$+ \int_0^x \overline{K(t,x)} \Big\{ \overline{R_s(0,t)} - \frac{1}{2}\,\overline{R(0,t)} \int_0^\infty \overline{r(t)}\,dt \Big\} dt = 0,$$

$$- \overline{R(0,x)} + \overline{K(0,x)} - \int_0^x \overline{K(t,x)}\;\overline{R(0,t)}\,dt = 0.$$

Второе из этих равенств совпадает по существу со вторым из равенств (9), а первое получается дифференцированием (9), если еще принять во внимане, что

$$K(0,0) = R(0,0) = \frac{1}{2} \int_0^\infty r(t)\,dt.$$

Теперь мы докажем следующую основную теорему.

Теорема 2. Пусть при некоторых, вообще говоря, комплексных λ_n *и* λ_n^* *функции* $\varphi(x,\lambda_n)$ *и* $\omega(x,\lambda_n^*)$ *удовлетворяют уравнениям*

$$\varphi''(x, \lambda_n) + (\lambda_n - q(x))\varphi(x, \lambda_n) = 0,$$

$$\omega''(x, \lambda_n^*) + (\lambda_n^* - \overline{q(x)})\,\omega(x, \lambda_n^*) = 0,$$

соответственно и образуют полную биортогональную систему в $L_2(0, \infty)$. *Тогда, если через* $\psi(x, \lambda_n)$ *обозначить решение уравнения* (1) *при* $\lambda = \lambda_n$, *удовлетворяющее условию* $\lim\limits_{x \to \infty} |\psi(x, \lambda_n) - \varphi(x, \lambda_n)| = 0$ *(такое решение существует), а через* $\chi(x, \lambda_n^*)$ *обозначить решение задачи Коши* (14)—(15) *при* $\lambda = \lambda_n^*$, *то функции* $\psi(x, \lambda_n)$ и $\chi(x, \lambda_n^*)$ *суммируемы с квадратом и образуют полную биортогональную систему в* $L_2(0, \infty)$.

Доказательство. Положим

$$\psi(x, \lambda_n) = \varphi(x, \lambda_n) + \int\limits_x^\infty K(x, t)\,\varphi(t, \lambda_n)\,dt,$$

$$\chi(x, \lambda_n^*) = \omega(x, \lambda_n^*) - \int\limits_0^x \overline{R(t, x)}\,\omega(t, \lambda_n^*)\,dt,$$

то из теоремы 1 и леммы 3 следует, что достаточно лишь обнаружить полноту и биортогональность этой системы. Для доказательства заметим, что для любых $f(x)$ и $g(x)$, суммируемых с квадратом, имеем

$$\int\limits_0^\infty f(x)\left\{g(x) - \int\limits_0^x R(t, x)\,g(t)\,dt\right\}dx = \int\limits_0^\infty\Bigg\{f(x) -$$

$$- \int\limits_x^\infty R(x, s)\,f(s)\,ds\Bigg\}\,g(x)\,dx. \tag{18}$$

Далее, как это следует из (9), для любой $f(x) \in L_2(0, \infty)$ имеет место равенство

$$\int\limits_x^\infty K(x, t)\,f(t)\,dt - \int\limits_x^\infty R(x, s)\left[f(s) + \int\limits_s^\infty K(s, t)\,f(t)\,dt\right]ds = 0. \tag{19}$$

Далее, на основании (18), имеем

$$\int\limits_0^\infty \psi(x, \lambda_n)\,\overline{\chi(x, \lambda_m^*)}\,dx = \int\limits_0^\infty\left\{\varphi(x, \lambda_n) + \int\limits_x^\infty K(x, t)\,\varphi(t, \lambda_n)\,dt\right\}\Bigg\{\overline{\omega(x, \lambda_m^*)} -$$

$$- \int\limits_0^x R(t, x)\,\overline{\omega(t, \lambda_m^*)}\,dt\Bigg\}dx = \int\limits_0^\infty\Bigg\{\varphi(x, \lambda_n) + \int\limits_x^\infty K(x, t)\,\varphi(t, \lambda_n)\,dt -$$

$$-\int_x^\infty R(x, s)\left[\varphi(s, \lambda_n) + \int_s^\infty K(s, t)\varphi(t, \lambda_n)\,dt\right] ds\Bigg\}\overline{\omega(x, \lambda_m^*)}\,dx,$$

откуда в силу (19) следует биортогональность системы $\psi(x, \lambda_n)$ и $\chi(x, \lambda_n^*)$.

Остается доказать, что всякая функция $f(x) \in L_2(0, \infty)$ разлагается в сходящийся в среднем ряд

$$f(x) = \underset{N \to \infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \sum_{n=1}^{N}\left(\int_0^\infty f(x)\overline{\chi(x, \lambda_n^*)}\,dx\right)\psi(x, \lambda_n). \tag{20}$$

А для этого, как легко видеть, достаточно лишь проверить сходимость последнего ряда, ибо система $\psi(x, \lambda_n)$ полна. Но в силу (18)

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\int_0^\infty f(x)\overline{\chi(x, \lambda_n^*)}\,dx\right)\psi(x, \lambda_n) = \sum_{n=1}^{N}\left(\int_0^\infty\Bigg\{f(x) -\right.$$

$$\left.-\int_x^\infty R(x, s) f(s)\,ds\Bigg\}\overline{\omega(x, \lambda_n^*)}\,dx\right)\varphi(x, \lambda_n) +$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\left(\int\Bigg\{f(x) - \int_x^\infty R(x, s) f(s) ds\Bigg\}dx\right)\int_x^\infty K(x, t)\varphi(t, \lambda_n)\,dt.$$

Но первая сумма в правой части сходится в среднем в силу биортогональности системы $\omega(x, \lambda_n^*)$ и $\varphi(x, \lambda_n)$. Вторая же сумма сходится в силу того, что если

$$F(t) = \underset{N \to \infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\, F_N(t), \text{ то и } \int_x^\infty K(x, t) F(t)\,dt = \underset{N \to \infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \int_x^\infty K(x, t) F_N(t)\,dt.$$

Укажем теперь одно следствие доказанных теорем.

Теорема 3. *Пусть $q(x)$ и $T(x, t)$ гладкие комплекснозначные функции, причем $T(x, t)$ финитна, а $q(x)$ неотрицательна при достаточно больших x. Пусть далее задана последовательность отрицательных чисел λ_k. Тогда для того, чтобы система $\psi(x, \lambda_n)$ суммируемых с квадратом на полуоси решений уравнения*

$$\psi''(x, \lambda_n) + (\lambda_n - q(x))\,\psi(x, \lambda_n) + \int_x^\infty T(x, t)\,\psi(t, \lambda_n)\,dt = 0$$

была полна в $L_2(0, \infty)$, достаточно, а в случае финитности $q(x)$ и необходимо, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_n|}} = \infty.$$

Доказательство. В силу теорем 1 и 2 достаточность есть следствие известного результата Шноля ([2]), а необходимость вытекает из того, что при $q(x) \equiv 0$, $T(x, t) \equiv 0$ имеем $\psi(x, \lambda_n) = e^{-\sqrt{|\lambda_n|}\, x}$. Теперь подстановка $t = e^{-x}$ сводит вопрос к известной теореме Мюнца.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Հ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Մի ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման լուծումների լրիվության մասին

Դիցուք $q(x)$-ը ողորկ կոմպլեքս ֆունկցիա է որոշված դրական կիսաառանցքի վրա, իսկ $r(x)$-ը և $T(x, t)$ ողորկ են և ֆինիտ. այսինքն զանում են զրո որոշ կոմպակտից դուրս։ $R(x, t)$-ով նշանակենք

$$R_{t^2}(x, t) - R_{x^2}(x, t) + [q(x) - q(t) - r(t)]\, R(x, t) +$$

$$+ \int_x^t R(x, s)\, T(s, t)\, ds - T(x, t) = 0$$

հավասարման միակ ֆինիտ լուծումը $0 \le x \le t$ տիրույթում, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին.

$$R(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^{\infty} r(t)\, dt$$

Աշխատանքի հիմնական արդյունքը կարելի է ձևակերպել այսպես՝

Թեորեմ: Դիցուք $\varphi(x, \lambda_n)$ և $\omega(x, \lambda_n^*)$ ֆունկցիաները կազմում են լրիվ բիօրթոգոնալ սիստեմ $L_2(0, \infty)$-ում և համապատասխանաբար բավարարում են

$$\varphi''(x, \lambda_n) + (\lambda_n - q(x))\, \varphi(x, \lambda_n) = 0, \qquad \omega''(x, \lambda_n^*) + (\lambda_n^* - \overline{q(x)})\, \omega(x, \lambda_n^*) = 0$$

հավասարումներին։ Այդ գոյություն ունեն քառակուսու հետ մեկտեղ հանրագումարելի ֆունկցիաներ $\psi(x, \lambda_n)$, որոնք բավարարում են

$$\psi''(x, \lambda_n) + (\lambda_n - q(x) - r(x))\, \psi(x, \lambda_n) + \int_x^{\infty} T(x, t)\, \psi(t, \lambda_n)\, dt = 0$$

հավասարմանը և $\lim_{x \to \infty} |\psi(x, \lambda_n) - \varphi(x, \lambda_n)| = 0$ պայմանին։

Բացի այդ եթե $\chi(x, \lambda_n^*)$-ով նշանակենք հետևյալ Կոշիի խնդրի լուծումը

$$\chi''(x, \lambda_n^*) + (\lambda_n^* - \overline{q(x)} - \overline{r(x)})\, \chi(x, \lambda_n^*) + \int_0^x \overline{T(t, x)}\, \chi(t, \lambda_n^*)\, dt = \overline{R_t(0, x)}\, \omega(0, \lambda_n^*) - \overline{R(0, x)}\, \omega'(0, \lambda_n^*),$$

$$\chi(0, \lambda_n^*) = \omega(0, \lambda_n^*), \qquad \chi'(0, \lambda_n^*) = \omega'(0, \lambda_n^*) - \frac{\omega(0, \lambda_p^*)}{2} \int_0^\infty \overline{r(t)}\, dt,$$

ապա $\psi(x, \lambda_n)$ և $\chi(x, \lambda_n^*)$ ֆունկցիաները կազմում են լրիվ բիօրթոգոնալ սիստե[...] $L_2(0, x)$-ում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Б. Нерсесян*, „Известия АН АрмССР", серия физ.-мат. наук, т. XII, № [...] (1959). [2] *Э. Шноль*, ДАН СССР, т. 109, № 5 (1956), стр. 910—912.